

淺談信用衍生性商品之動態違約系統評價模型

◎林冠志

本文主要是在介紹評價信用衍生性金融商品的動態模型，並應用來評價標準化的擔保債權憑證（CDO）商品，iTraxx Europe index。此動態模型相對於之前市場上常用的 copula 靜態模型，應用的範圍更廣，其可以評價更多的新奇型信用衍生性商品。本文引用 Hull and White（2007）提出的簡單動態模型的概念，修改其中幾項模型參數並探討出較適合的評價過程，使此模型更具經濟上的意義。

壹、前言

信用衍生性商品是信用交易人爲規避交易對手信用風險，而與第三方承作的衍生性金融商品。其主要功能在於利用與第三者承作的交易，規避或降低因交易對手違約所需承擔的信用風險，藉以達到風險控管的目的。簡言之，信用衍生性商品在整個交易架構中即是一種信用風險避險的媒介工具。

信用衍生性商品的交易量近年來快速成長，雖然金融風暴帶來超乎預料的衝擊，但此商品仍

是市場上很重要的金融商品。而以信用衍生性商品爲基礎所創新而成的證券化產品：抵押擔保債券憑證（collateralized debt obligation）更成爲金融機構移轉信用風險的一項工具。爲了進一步增加信用風險市場的流動性，減少交易成本，近年來更編纂標準化的信用指數（iTraxx index），使交易透明度增加。如何模型化信用風險，並進一步評價這些信用風險衍生性商品，便成爲一項重要的議題。

評價信用衍生性金融商品的標準市場模型以 copula 方法爲主。而市場上卻存在著有很多不同型態的 copula 函數，Li（2000）介紹一因子的 Gaussian copula 應用在兩家公司的情況，而 Gregory and Laurent（2005）推廣此模型至 N 家公司。除了 Gaussian copula，t-copula、double-t copula、Clayton copula、Archimedian copula 以及 Marshall Olkin copula 都曾被研究過。然而這些方法都普遍存在著兩個主要的問題：第一，它們都不能表示違約的動態相依性；第二，無理論基礎支持我們去選擇何種相依結構。而 Copula 的模型又稱爲固態模型，因爲它無法描述違約環境



的變化過程。因此無法使用此模型來評價新奇型信用衍生性商品，如遠期信用商品（Forward Starting Credit Products）或 CDO 分券選擇權（Options on CDO Tranches）

由於新奇型信用商品市場蓬勃發展，已有很多研究投入在動態信用風險模型的建構上，如 Albanese et al.（2006）、Bennani（2006）、Brigo et al.（2007）、Hull and White（2007）與 Sidenius et al.（2006）等。以上所描述的模型主要分為三大類—結構式模型（Structural Model）、上至下模型（Top-Down Model）與縮減式模型（Reduced-Form Model）。

結構式模型的最初始版本類似於 Gaussian copula 模型。Albanese et al.（2006）在結構式模型的架構下，以馬可夫鏈來表示債務者違約時間的長短提出一種評等轉移模型。上至下模型是一種推演資產池損失情形的動態模型。它模擬資產池中公司的損失分配函數，進而直接模擬出整個資產池累積損失的過程。這個方法被 Bennani（2006）、Sidenius et al.（2006）等人所提出。Bennani（2006）建構一個立即損失的模型，將它當成是剩餘名目本金的百分比。而 Sidenius（2006）則運用 HJM（1992）的利率期間結構概念，結合無套利方法，模擬未來某一時間點損失會低於某一水準的機率。

縮減式模型的動態結構則是針對個別公司違約的隨機過程。Brigo et al.（2007）以一般化卜瓦松過程（Generalized Poisson Process），允許一小段時間間隔內有多個違約事件發生，建構資產池違約數量的動態模型。Hull and White

（2007）則提出包含縮減式與上至下兩種概念的模型，不僅容易執行也易於校正市場數據。在此模型架構下，公司的違約率包含兩項，決定型漂移項與週期性經濟衝擊的影響程度。衝擊影響的程度扮演著類似於 Gaussian copula 模型中違約相關係數（Default Correlation）的角色，而此文獻亦提供精確校正市場數據的例子。本文將修正 Hull and White（2007）模型中的一些參數，使其評價方式更具經濟意義，並試著校正於市場數據找出參數值與誤差。

貳、擔保債權憑證與指數型分券之評價模式

一、指數型分券（Index Tranche）商品之介紹

目前信用風險指數（CDS index）的市場中，以交易 Dow Jones CDX NA IG index 與 iTraxx Europe index 最為活絡。兩種指數的編纂主要是採平均權重的原則。舉例說明，前者涵蓋北美地區具投資等級的 125 家公司之 CDS 信用價差，因此每一家公司所佔的權重即為 1/125。而以這些公司的 CDS 信用價差組成資產池的擔保債權憑證之分券就稱之為信用風險指數的指數型分券。依照損失的始賠點與止賠點來劃分，Dow Jones CDX NA IG index 的分券結構是 0%~3%、3%~7%、7%~10%、10%~15% 以及 15%~30%；而 iTraxx Europe index 則是 0%~3%、3%~6%、6%~9%、9%~12% 以及 12%~22%。

第一層分券（0%~3%）即俗稱的權益分券，它的風險溢酬的給付方式與其它分券不同；分成兩部分，第一部份是本金的百分比給付（Upfront percentage payment），第二部份則是風險溢酬，固定每年支付 500 個基點，而其市場報價則是報第一部份。其餘非權益分券的風險溢酬則依照市場報價只給付第二部分。所以評價指

數型分券時得了解不同分券的報價意涵。市場報價資訊亦會提供指數價差（Index Spread），它是加權平均所有公司的 CDS 價差而來。如（表一）所列，三年到期的指數價差是 77 個基點，五年到期的則是 101 個基點，其餘以此類推。我們將從市場提供的指數價差資訊去導出違約的強度，進一步再評價指數型分券。

表一 97 年 4 月 2 日的 iTraxx CDO 分券報價（以基點為單位）

	損 始	失 賠	點	期數（年）			
				3	5	7	9
指數價差				77.00	101.00	104.00	106.00
分券結構	0%		3%	n/a	32.00	39.00	43.00
	3%		6%	n/a	395.00	485.00	n/a
	6%		9%	n/a	245.00	280.00	310.00
	9%		12%	n/a	n/a	180.00	n/a
	12%		22%	n/a	n/a	90.00	100.00

二、從指數價差建立隱含的違約機率

本節介紹從指數型分券的 CDS 價差導出違約強度的方法，使用縮減式模型的時間非齊質性卜瓦松過程（Time-Inhomogeneous Poisson Process），以 $\lambda(t)$ 來代表隨著時間變動的違約強度，而累積違約函數則以 $\Gamma(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ 來表示。我們假設違約強度是階梯函數，即 $\lambda(t) = \lambda_i$ 對於任意 $t \in (T_{i-1}, T_i)$ ， T_i 是期數， $\beta(t)$ 是 t 之後的第一個 T_i 。舉例來說，假如 $t = 6.25$ 則 $\beta(t) = 7$ 。因此累

積違約函數可表示為

$$\Gamma(t) = \int_0^t \lambda(u) du = \sum_{i=1}^{\beta(t)-1} (T_i - T_{i-1}) \lambda_i + (t - T_{\beta(t)-1}) \lambda_{\beta(t)}$$

典型的信用違約交換契約之現金流量可分成兩部份：違約支出（default leg）與溢酬收入（premium leg）。我們再假設以下變數： d_i 是 $[0, t_i]$ 的風險折現因子、 S_{CDS} 是 CDS 契約的合理信用價差、 T 是此契約的到期年數、 τ 是違約事件的發生點、 Q 是風險中立下的違約機率以及是違約後的回復率。並假設此 CDS 之風險溢酬每季給付一次，則違約給付的現值為



$$(1-R) \sum_{i=1}^{4T} d_i Q(\tau \in [t_{i-1}, t_i]) = (1-R) \sum_{i=1}^{4T} d_i (\exp(-\Gamma(t_{i-1})) - \exp(-\Gamma(t_i)))$$

而溢酬收入的現值為

$$S_{CDS} \sum_{i=1}^{4T} d_i (t_i - t_{i-1}) Q(\tau > t_i) + S_{CDS} \sum_{i=1}^{4T} d_i \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} Q(\tau \in [t_{i-1}, t_i])$$

$$= S_{CDS} \sum_{i=1}^{4T} d_i (t_i - t_{i-1}) \exp(-\Gamma(t_i)) + S_{CDS} \sum_{i=1}^{4T} d_i \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} (\exp(-\Gamma(t_{i-1})) - \exp(-\Gamma(t_i)))$$

最後透過違約支出等於溢酬收入的關係，估算出此 CDS 的合理信用價差

$$S_{CDS} = \frac{(1-R) \sum_{i=1}^{4T} d_i (\exp(-\Gamma(t_{i-1})) - \exp(-\Gamma(t_i)))}{\sum_{i=1}^{4T} d_i (t_i - t_{i-1}) \exp(-\Gamma(t_i)) + \sum_{i=1}^{4T} d_i \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} (\exp(-\Gamma(t_{i-1})) - \exp(-\Gamma(t_i)))} \quad (1)$$

根據市場上的數據我們可以得到不同期數的 CDS 價差，再依據公式(1)便可反推出違約強度的參數，進而建立違約強度函數。

三、擔保債權憑證之評價過程

此節將介紹一般擔保債權憑證（CDO）的評價方程式。我們假設所有資產池中的公司都有相同本金與違約機率，此即所謂的齊質性。假設此 CDO 商品涵蓋 N 家公司，其總名目本金是 P。a 和 b 分別是某一分券的賠償始付點與止付點，因此分券本金是 $(b-a) \times P$ 。在契約的存在期間，此分券的賣方得對資產池的損失介於 $a \times P$ 與 $b \times P$ 之間提供保護；買方則依據剩餘的名目本金定期給付風險溢酬。若在時間點 t 有 n 個違約發生，則分券本金為

$$W(n, t) = \begin{cases} (b-a) \times P & n < \frac{a \times N}{1-R} \\ b \times P - n \times \frac{P}{N} \times (1-R) & \text{if } \frac{a \times N}{1-R} < n < \frac{b \times N}{1-R} \\ 0 & n > \frac{b \times N}{1-R} \end{cases}$$

假如可以導出時間點 t_i 的預期分券本金 $E[W_i]$ ，則可根據以下過程計算此分券在始點的價值。假設 S_{CDO} 是此 CDO 契約的合理價差、CDO 之風險溢酬每季給付一次。根據預期溢酬收入現值要等於預期違約支出現值的關係，我們有以下等式

$$E \left[\sum_{i=1}^{4T} S_{CDO} (t_i - t_{i-1}) W_i d_i \right] = E \left[\sum_{i=1}^{4T} (W_i - W_{i-1}) d_i \right]$$

右邊是溢酬收入，相當於天期乘上預期分券本金與合理 CDO 價差；左邊是違約支出，它是連續兩次給付期間分券本金的損失額度。由此等式則可導出此 CDO 分券的合理價差為

$$S_{CDO} = \frac{E \left[\sum_{i=1}^{4T} (W_i - W_{i-1}) d_i \right]}{E \left[\sum_{i=1}^{4T} (t_i - t_{i-1}) W_i d_i \right]} = \frac{\sum_{i=1}^{4T} (E[W_i] - E[W_{i-1}]) d_i}{\sum_{i=1}^{4T} (t_i - t_{i-1}) E[W_i] d_i} \quad (2)$$

若 CDO 價差已由市場報價給定，則此 CDO 的價值即為

$$V_{CDO} = \sum_{i=1}^{4T} (t_i - t_{i-1}) E[W_i] d_i - \sum_{i=1}^{4T} (E[W_i] - E[W_{i-1}]) d_i$$

因此，評價的問題就只剩下如何計算出某一時間點的預期分券本金。

參、動態模型之建構與應用

一、動態模型之介紹與重建

此模型的主要概念是假設存在著某一違約率的函數主導資產池中信用變化的動態性。經濟層面的週期性影響使得違約環境面臨衝擊，當衝擊發生時，每一家公司都有潛在的正違約機率，因此經濟上的衝擊伴隨著違約事件的發生。實證上的研究顯示，違約率高時違約相關係數也跟著增加，故這些衝擊與其影響的程度與違約相關係數保持著正相關的關係。在風險中立下，Hull and White (2007) 建構的違約率模型有著決定型的漂移項與受經濟週期性影響的衝擊項

$$X(t) = M(t) + \sum_{j=1}^{N(t)} H_j$$

經濟上衝擊的次數 $N(t)$ 是一個強度為 λ 的躍動過程 (Jump Process)，其躍動的大小 (經濟衝擊的程度) 為 $H_j = H_0 e^{j\beta}$ ， H_0 和 β 是正的常數， j 是指第 j 次經濟衝擊。

Hull and White (2007) 先提出此模型的簡化版本。模型中的漂移項是零，且對任一經濟衝擊而言，其衝擊程度是常數，也就是說， $M(t) = 0$ 且 $\beta = 0$ 。強度 $\lambda(t)$ 是時間相依性的，將從指數價差解出此函數。因此，經簡化後的模型只剩下一個參數，經濟衝擊的程度 H_0 ，而此參數將由指數型分券的報價校正出。但是，原始的三參數模

型的校正方式有所不同，強度 λ 改為固定的常數，而漂移項 $M(t)$ 決定於指數價差，其餘三參數 λ 、 H_0 與 β 將由指數型分券的報價校正。

Hull and White 建構的三參數版本的模型對市場上的數據提供良好的適切性，然而其效正的方法卻與簡化版本的模型不一致。三參數版本假設強度為常數與經濟上的意義較不符合，而簡化版本的強度 λ 變數為時間的函數相對上則較為合理。如 2-2 節所述，我們可從指數價差反推違約強度的參數，建立違約機率函數。此強度函數基於卜瓦松過程主要是用來模擬稀少事件的發生次數，相同地，Hull and White 建立的違約率模型，其受經濟衝擊影響的次數亦是屬於卜瓦松過程，所以若使用此推導過程，將會使此模型更具經濟上的意義。此外，決定型的漂移項亦可看成是第零次經濟衝擊的影響程度。因此基於以上理由，將此動態模型重建成

$$X(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} H_j \quad (3)$$

此重建後的模型只有兩個參數，亦可簡化成一個參數。而不管是哪種版本，其強度函數皆校正於指數價差，其他參數再校正於分券的報價。

二、動態模型之應用

在違約率函數為模型(3)的情況下，累積至時間 t 的生存機率為 $S(t)$ ，其與 $X(t)$ 的轉換關係式定義為 $S(t) = \exp(-X(t))$ 。設資產池中有 N 家公司，則時間點 t 前有 n 家違約的機率為

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} (1-S(t))^n S(t)^{N-n}。$$



接下來根據動態模型(3)，使用解析方法開始評價指數型分券的價值，而依照 2-3 節文末的敘述，現在只需計算預期分券本金即可。至時間點 t 前發生 J 次經濟衝擊的機率為

$$P(J,t) = \frac{\Gamma(t)^J \exp(-\Gamma(t))}{J!} \text{。在時間點 } t \text{ 若已有 } J$$

次經濟衝擊，則生存機率為 $S(J,t) = \exp\left[-\sum_{j=1}^J H_j\right]$

。假設至時間點 t 前已有 J 次經濟衝擊，則發生 n 個違約事件的機率為 $\Phi(n, t|J)$ 。則在 J 次經濟衝擊的情況下，預期的分券本金為

$$E(t|J) = \sum \Phi(n, t|J) W(n, t) \text{。最後，預期分券}$$

$$\text{本金} \quad E(W_i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(J,t) E(t|J) \quad (4)$$

因此帶入式子(4)於方程式(2)便可得出指數型分券的合理價差，因此指數型分券可以運用重建後的模型直接解析評價。

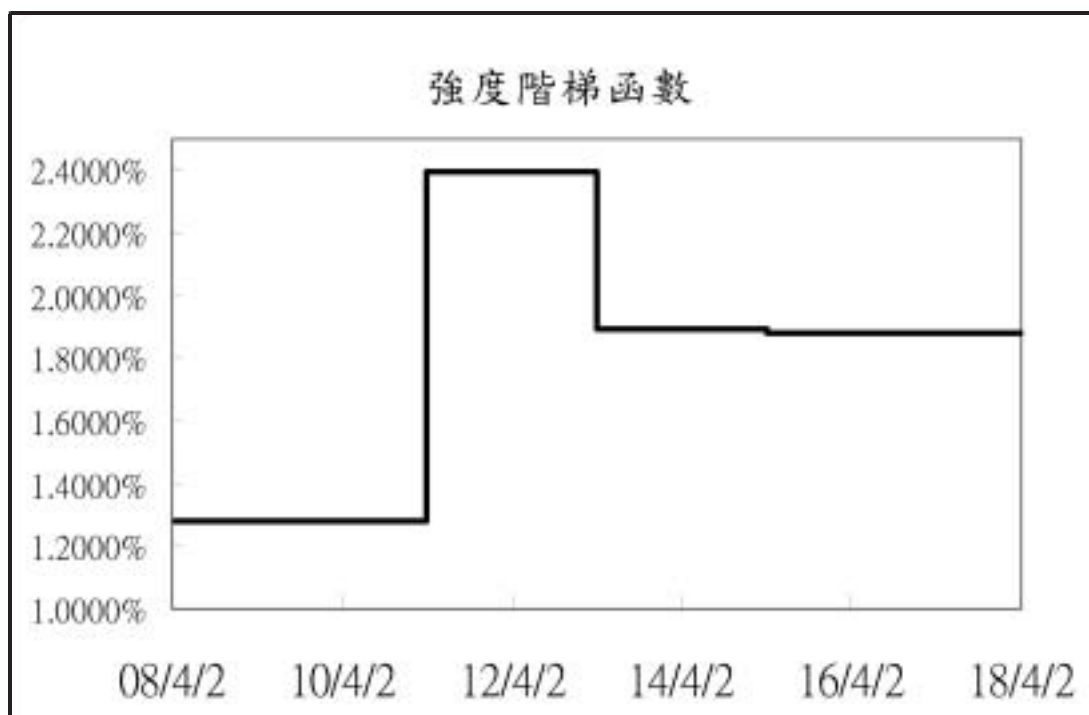
肆、校正與數值結果

運用重建後的模型校正（表一）的市場報價。假設回復率 $R = 40\%$ ，市場無風險利率 $r = 5\%$ 。我們先以報價上的指數價差導出違約的強度函數，再分別用兩種版本的重建後模型校正市場上的分券報價數據。

（表二）是依 CDS 的評價公式(1)導出的違約強度，其顯示由市場上的數據可推測在未來三至五年違約的風險性相對較高。

表二 校正後的強度函數

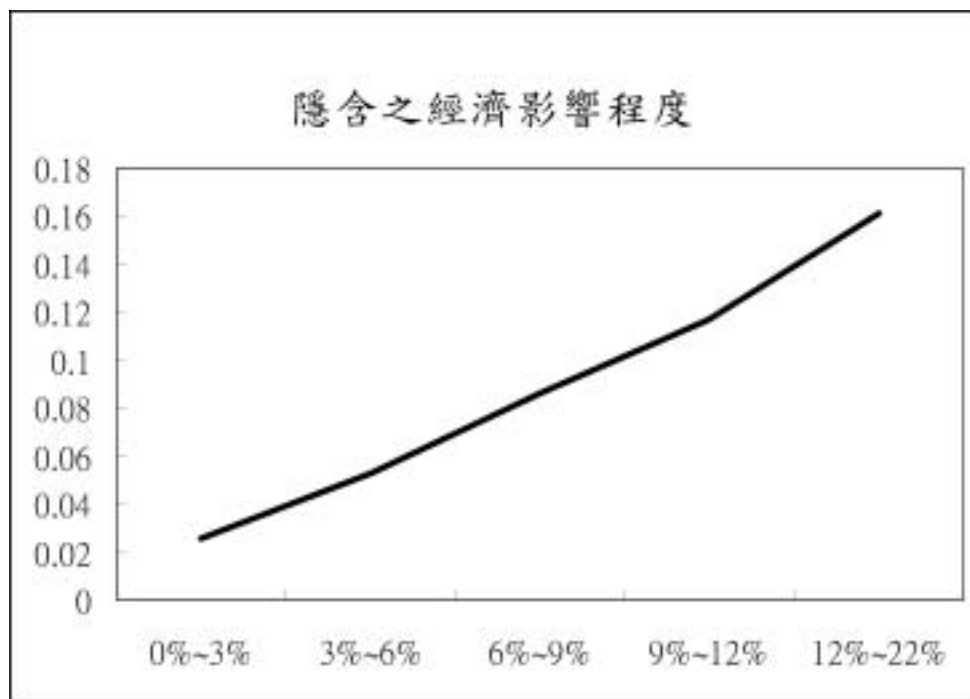
期數（年）	到期日	指數價差（基點）	強度
3	2011/4/2	77.00	1.2833%
5	2013/4/2	101.00	2.3937%
7	2015/4/2	104.00	1.8934%
10	2018/4/2	106.00	1.8775%



接下來我們先以重建後的單參數模型，利用 含之經濟衝擊的影響程度。
 （表一）市場指數型分券的報價數據，導出其隱

表三 使用單參數模型導出隱含之經濟衝擊的影響程度

損失始賠點	損失止賠點	期數（年）			
		3	5	7	9
0%	3%	n/a	0.021624	0.025900	0.028973
3%	6%	n/a	0.046711	0.052679	n/a
6%	9%	n/a	0.080631	0.086129	0.091677
9%	12%	n/a	n/a	0.116501	n/a
12%	22%	n/a	n/a	0.161174	0.166269



由校正出來的數據可以得知經濟的衝擊對權益分券的影響程度較小，對高層級的分券影響則較大。而如同前文所提及，衝擊的程度與違約的相關係數呈正相關，當衝擊小的時候，相關係數接近於零；而當衝擊程度大時，違約率則高，而其相關係數則接近於 1。

最後利用最佳化的數值方法從（表一）市場上的分券報價校正出重建後模型的兩個參數 H_0 與 β ，即求出 H_0 與 β 的最適解使得市場分券價差與模型分券價差有最小平方和。所求得的最適解為 $H_0 = 0.046750$ 與 $\beta = 1.835630$ ，而模型與市場的報價誤差如（表四）。

表四 重建後模型校正於市場報價之誤差（以基點為單位）

損失始賠點	損失止賠點	期數（年）			
		3	5	7	9
0%	3%	n/a	44.35	36.53	31.50
3%	6%	n/a	65.56	-88.86	n/a
6%	9%	n/a	-74.41	-104.85	-131.83
9%	12%	n/a	n/a	-6.84	n/a
12%	22%	n/a	n/a	3.87	-3.47

與 Hull and White (2007) 的原模型相比較，我們得將重建後的模型校正於相同日期的市場報價。以 (表五) 的資料為依據，原模型校正後的參數最適解數值分別是 $H_0 = 0.00223$ 、 $\beta = 0.9329$ 與 $\lambda = 0.1310$ ；而重建後的模型的最適解則為 $H_0 = 0.03569$ 與 $\beta = 1.42379$ ，兩者與市場報價的誤差分別如 (表六) 與 (表七)。結果顯

示，雖然重建後模型使用的評價方式較具經濟意義，但其報價對市場的適切性不如原模型。就 (表四) 與 (表七) 的內容來看，可以發覺重建後的模型對七年期 12%~22% 的指數型分券之報價誤差較少，對 3%~6% 的指數型分券的誤差則相對大很多，而原模型對所有市場分券報價的適切性都很高。

表五 96 年 1 月 30 日的 iTraxx CDO 分券報價 (以基點為單位)

	損失始賠點	損失止賠點	期數 (年)			
			3	5	7	9
指數價差			15.00	23.00	31.00	42.00
分券結構	0%	3%	n/a	10.25	24.25	39.30
	3%	6%	n/a	42.00	106.00	316.00
	6%	9%	n/a	12.00	31.50	82.00
	9%	12%	n/a	5.50	14.50	38.25
	12%	22%	n/a	2.00	5.00	13.75

表六 原模型校正於表五的市場分券報價之誤差 (以基點為單位)

損失始賠點	損失止賠點	期數 (年)			
		3	5	7	9
0%	3%	n/a	1.34	2.75	4.32
3%	6%	n/a	0.37	3.12	-1.37
6%	9%	n/a	-0.54	-2.69	-1.92
9%	12%	n/a	-1.01	-1.55	-0.12
12%	22%	n/a	-0.47	-0.21	1.28



表七 重建後模型校正於表五的市場分券報價之誤差

損失始賠點	損失止賠點	期數 (年)			
		3	5	7	9
0%	3%	n/a	-48.44	-32.48	-15.12
3%	6%	n/a	-85.96	-13.11	194.89
6%	9%	n/a	-21.99	-14.25	20.01
9%	12%	n/a	-10.65	-7.45	8.00
12%	22%	n/a	0.92	3.12	10.09

伍、結 語

此篇文章修正 Hull and White (2007) 建構的信用動態模型，除保留其既有操作上的優點與模型特性外，還提出更具經濟意義的評價方式。而缺點是校正後的模型分券報價與市場分券報價之差異有些微落差，推估是參數減少所致。往後若要進一步推廣此模型，可針對不同演算法考慮其收斂性與報價的一致性，並研究此模型用於新奇特信用商品的評價，使之應用層面更廣更多元。

參考資料

1. A New Framework for Dynamic Credit Portfolio Loss Modeling, Sidenius et al., 2006.
2. Basket Default Swaps, CDO's, and Factor Copulas, Gregory, J. and L.-P. Laurent, 2005.
3. Calibration of CDO Tranches with the Dynamical Generalized-Poisson Loss Model, Brigo et al, 2007.

4. Dynamic Models of Portfolio Credit Risk: A Simplified Approach, Hull, J. and A. White, 2007.
5. Dynamic Credit Correlation Modeling, Albanese et al., 2006
6. On Default Correlation: A Copula Approach, Li, D.X., 2000.
7. Pricing Portfolio Credit Derivatives Using a Simplified Dynamic Model, Kuan-Chi Lin, 2008.
8. The Forward Loss Model: A Dynamic Term Structure Approach for the Pricing of Portfolio Credit Risk, Bennani, N., 2006.

作者簡介



林冠志下士，成功高中普通班、清華大學數學系應用數學組、台灣大學財務金融研究所財務工程組畢業，現任陸軍第六軍團蘭陽地區指揮部混砲營砲二連預算財務士。