

砲令射控中雷達追蹤用彈道模型

洪兆宇¹ 趙嘉琦² 尹清崗³ 尹清岩⁴

¹陸軍軍官學校機械工程系

²軍備局生產製造中心計畫資訊組

³軍備局中山科學研究院電子裝備研究所

⁴逢甲大學機械與電腦輔助工程系

摘 要

在新一代砲令射控之追蹤架構中，已將動目標追蹤理論和外彈道理論結合。本文分析研究了彈頭運動的局部變化規律，提出一種簡化的彈道數學模型，適用於半閉迴路之砲令射控武器系統火控雷達對彈頭目標的即時追蹤，可以有效地降低彈道濾波和預測的計算量並提高彈道濾波和預測的精度，使之滿足武器系統對追蹤精度和處理速度的嚴格要求，具有重要的工程應用價值。

關鍵字：砲令射控、彈道、濾波、動目標追蹤、目標模型

Motion Model of Ballistic for Radar Tracking in Gun Fire Control System

Chao-Yu Hung¹, Chia-Chi Chao², Ching-Kang Yin³ and Ching-Yan Yin⁴

¹Department of Mechanical Engineering, Chinese Military Academy

²Planning and Information Division, MPC, Armaments Bureau

³Electronic Systems Research Division, CSIST, Armaments Bureau

⁴Department of Mechanical and Computer Aided Engineering, Feng Chia University

ABSTRACT

In the tracking configuration of modern fire control system have combined trajectory theory and the maneuvering target-tracking theory. This paper analyzed the state of local change of projectile and proposes a simplified trajectory mathematic model, which can be applied on semi closed-loop fire control RADAR to track Maneuvering Target in real time. This can be effective to decrease Trajectory Filtering time and enhance predicting accuracy, and satisfy weapon system requested on tracking and processing quick response. The research has important engineering practicability.

Keyword：fire control, trajectory filtering, tracking of maneuvering target, target model

一、前言

火炮射控是半閉迴路控制，僅能在內彈道階段配合實施控制手段。彈頭出砲口，它的飛行軌跡，即脫離人為的控制範圍，而完全根據彈頭本身的外彈道特性(即運動方程式)飛行。因此射控砲火能精確命中目標，係在可觀(Observable)部分估測、可控(Controllable)部分控制；此一過程可簡單地描述為：系統經過估測目標前置位置、估計彈頭飛行軌跡、設定飛行平衡時間等程序；若皆能滿足，則彈頭可撞擊目標。對於目標軌跡之估測，因甚多成熟研究結果已應用，且多以飛機為對象，速度較慢、體積相對較大，為此一研究領域人士所熟知。然而彈頭飛行軌跡因體積小、速度相對快出許多，且少有此一方面之成果；此外國外砲廠多將此一部份列為機密。故本文將研究適用於砲令射控之彈道模型，提供雷達帶砲最核心技術所需要之理論。為利說明，砲令射控解算示意如圖 1。

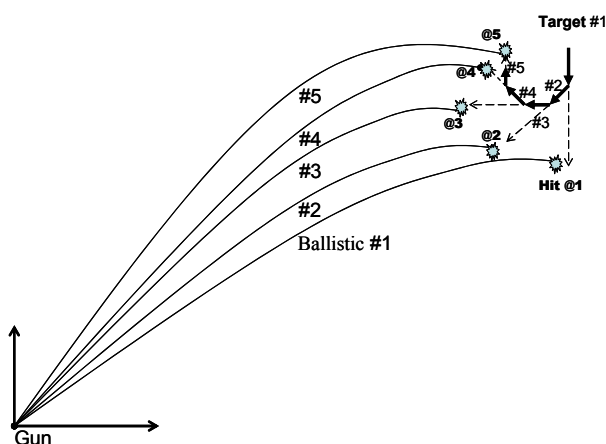


圖 1.砲令射控解算示意圖。

在現代火炮武器系統中，為了提高命中率，開始發展砲令射控，這就需要射控雷達能即時量測出每發彈藥偏離目標的誤失距離(Miss Distance)，也就是說，射控雷達不僅要跟蹤目標，也要對彈頭的運動進行跟蹤，濾波和預測。如同對射擊目標的跟蹤，對彈頭運動的跟蹤也是一個動目標跟蹤問題。在動目標跟蹤理論中，首要關鍵的任務是發展合適的動目標模型。彈頭出砲口後的運動不同於一般觀念中的機動目標。彈頭的運動中沒有人為的機動，並且其運動規律，在外彈道學中已經被前人研究過，可以用一個微分方程組來精確描述。此外，因為彈頭是由我方發射的，並且是在射控系統的控制下瞄準某一目標射擊的。因此，彈頭運動的參數不是隨機的，而是

嚴格地限制在某個範圍，這個變化範圍包括了武器系統本身的誤差和一些隨機因素的影響。砲令射控之目的在於即時校正射控系統的微小誤差，進而提高命中率。這一過程是即時進行的，又不能給射控系統和射控雷達的計算機增加太大的計算負荷，因此要求對彈頭運動的濾波和預測算法計算量要小，精度要高。採用複雜運算或其它微分方程組的彈頭運動數學模型不能滿足系統要求，建立一種滿足砲令射控精度要求，又便於射控系統即時處理的彈頭運動模型是本文研究重點。

二、文獻回顧

火炮的發展在過去二、三十年間有了極大的進步。新一代火炮與傳統火炮間最主要的區分為快砲增加了伺服穩定、系統帶砲之功能，此一部份在中口徑快砲最為明顯。該等改進過程在先進國家已由科學消化為技術後轉化為工藝，循軍售或技引將量產成品引入國內呈現於國人面前，使我傳統火炮研發者興起「迎頭趕上」之企圖。其間雖然能夠由國外引入成砲，但國外砲廠對其原理多秘而不宣。相關原理只散見於少數期刊[1-6]與美軍技術書刊[7]，國內某單位亦曾對此問題進行基礎研究[8-10]，然研發火炮非該單位之主要任務，故欠缺內外彈道學之實際運用經驗，致未有後續研究。後來一般人士較少投入此一領域之研究，但有少數有識之士投入伺服穩定[11-15、19-24]與系統帶砲之研究。伺服穩定之目的僅在使系統能夠帶砲，而帶砲之成熟作法為雷達帶砲。其它作法[25-27]未經過嚴格之系統工程步驟或有工程成品實績，僅停留在實驗室階段亦未完成原型(Prototype)品試造。研究雷達帶砲需要一個合適的彈道軌跡方程式，熱流領域學者之研究[16-18]未考慮砲令射控之雷達帶砲需求，故從工程實用之角度而言其研究不能直接為砲令射控所用；電機學者之研究[25-27]僅就其跟蹤法則而言，未考慮除了要跟蹤目標也要跟蹤彈丸軌跡，故未將跟蹤理論與外彈道理論結合，其研究亦不能直接為砲令射控所用。

依據使用國外火炮並利用逆向工程技術，建立彈頭外彈道運動即時追蹤模型，通常有下列幾種方法，介紹如后：

(一)操作者射表(User's Range Table)：可由純理論法或半實驗法求得，以砲口為原點量，求出「射角-射程曲線」。不論經由軍售或商購途徑，理論上砲廠(彈廠)都應該提供射表。將砲廠提供之操作者射表，在標準狀況下依

據不同的射程、砲口仰角、飛行時間、軌跡最高點等資料記錄存檔，另外對於風速、目標運動等則列出修正量。

- (二)操作者射表逼近曲線係數：將操作者射表依據假定之方程式，做曲線逼近求出係數，只要儲存這些特性係數，即可以代表操作者射表。
- (三)拖曳力係數(Drag Coefficient)：依據流體力學理論，使用實驗或半實驗方法，求出彈頭在空氣中之拖曳力係數，然後帶入運動方程式作軌跡積分，代表整個操作者射表。
- (四)設計者射表(Designer's Range Table)：依據彈頭運動方程式及標準狀況下終端收斂之特性，以砲口為原點量，可由半實驗法求得射控用資料，另行得出設計者射表，再依假定方程式作曲線逼近，將係數求出並儲存之，用來代表彈頭之運動方程式。
- (五)擴增設計者射表(Extended Designer's Range Table)：另行由設計者射表相近似概念及作法，推導出擴增設計者射表，將原設計者射表利用終端收斂區域之作法，修正為利用遞迴前數次彈道軌跡預測彈頭運動，得出擴增設計者射表。

經擷取國外經驗知，雷達帶砲射控系統為求有效節省記憶體，加快存取速度及方便計算，以採用(2)、(3)、(4)方法為主，其中又以第(4)種方法得出射控彈道數學模型之程序經驗證最有效且經濟，是原廠砲令發展主流。然而如今國情，火炮有循軍售管道獲得原廠授權生產者，未來將有國造火炮者。砲彈方面，隨載台獲得者為原廠砲彈，後續補充者為國造砲彈，工程發展遵「買砲造彈」政策進行。由於設計者射表為原廠系統、砲、彈所發展，其中只要有一分系統改變幅度超過原始設計所容許範圍，亦即終端收斂區域與原設計收斂區域有差異時，將使彈頭終端軌跡與設計者射表無法配合，不能再代入砲令系統中使用。為求國防自主並配合國內現有技術，故第(5)方法成為國造砲令發展項目。

三、數學模型

本文以某型式原廠快砲為例，研究這一問題。其方法也適用於其它中、大口徑砲令射控火炮。濾波和預測的基本條件是：(1)預測區域：延伸估測彈道可為直線逼近段。(2)預測範圍：120m(最大斜距離增加量)。(3)量測點數：8~16點。(4)取樣時間：1/32s。(5)測量誤差(RMS)：斜距 15m。(6)數據處理時間：0.667s。

3.1 區域穩定理論

從彈道學理論知，在理想的情況下，把彈頭當做質點研究時，彈頭軌跡取決於初速、射角和彈道係數等三個參數。由於各種擾動因素存在，這三個參數將會發生變化，而影響彈著點位置，使之偏離射擊目標。根據製造的特性，初速的參數變化是最主要的因素，並具有自然的(Natural)、天生的(Inherent)及不可避免的(Unavoidable)等發射藥工藝特性。初速的影響可用混沌(Chaos)現象說明，在穩定的線性系統裏，初始值少許的差異僅能造成輸出上少量的差異；混沌系統為非線性系統中其輸出對初始值極度過敏之現象與不可預測性(Unpredictability)。就彈著軌跡而言，若彈頭初速合格其行為類似極限循環(Limit Cycle)之表現，即軌跡均在一有限之區域運動，是漸趨於穩定的極限循環。若初速降至某一條件，分岔(Bifurcation)現象出現，彈著軌跡變為不可預測。由彈著區域軌跡之極限循環所顯示的物理意義為「彈著軌跡表現一種穩態的振盪(Steady-State Oscillation)是一種自然持續的振盪(Self-sustained oscillation)」。

3.2 雷達選用

防空系統之完整偵測裝置包含搜索雷達、射控(追蹤)雷達；搜索雷達又再細分為遠距離對空搜索雷達、近距離低空對空搜索雷達(預警雷達)及平面搜索雷達等3類。搜索雷達搜索距離通常超過 50 哩，由於其用於長距離之搜索，所以採用低頻(Low Frequency, LF)，以降低信號之衰減，同時其脈波(Puls)較寬，增加發射能量，再者其使用較低之脈波重複率(Puls Repeation Frequency)以增加偵測距離。在防空武器系統中，由於成本與功能等考量且居於副砲地位，並不單獨設計雷達，僅能分享主要武器之共用雷達，更要遷就其性能。射控雷達則可提供較搜索雷達更準確之定位、距離及高度資料，多使用超高頻(Very High Frequency, VHF)，而有關目標最初之方位，距離與高度則仰賴其他系統之搜索雷達提供，尤以近年雖有發展完成多功能相位陣列雷達，可完成全空域搜索、多目標追蹤，但成本驚人，傳統防空火炮並不值得搭配。另有部分國家之作法，防空火炮可能僅配備射控雷達或可提供追蹤功能的簡易型搜索雷達，一般稱之為掃描中追蹤(Track-while-scan, TWS)雷達，原理為雷達連續在作監視的規律運動掃描，當偵測到目標回跡的信號，可由目標速度代入目

標運動模型，而能預測出目標的未來動向、位置。在這過程中，由監視的掃描（scan）而同時亦可做目標的追蹤（Tracking）稱之。在 TWS 雷達中，當天線持續在旋轉掃描時，彈頭位置必須取得，且對彈頭進行速率解算。很顯然地，此種型式之雷達，每個彈頭之目標資料並非持續性地可供使用。因為天線持續在轉動掃描，彈頭資料由第一次獲得至下一次更新所用之儲存及分析方法甚為重要，射控計算機內建立之射表即被用於執行此種功能。TWS 雷達掃描所產生之目標回跡，在與原已掌握之資料比較之前，均被視為新的資料，需經過回跡波形認知及雜訊消除功能之處理。在射控計算機程式中所設定之邏輯法則乃將彈頭之回跡與現已掌握之追蹤資料做關連性之比對，以防止在高密度環境狀況下產生系統飽和之現象。簡而言之，落入追蹤閘內之彈頭目標回跡與射表做一關連性比對。每一個被偵測到之回跡將與射表儲存之資料予以比較，可與一個追蹤，數個追蹤或無追蹤做關連性之比對。相反地，一個追蹤閘亦可與一個回跡、數個回跡或無回跡做關連性之比對。此外，在 TWS 雷達中，由於彈頭目標移動甚快，為保持動態定位之精準，更需賴射表來重行定位及平滑移動之控制，達此目的之方法，即射表之平滑處理及前置預測來計算追蹤閘之位置變化。

3.3 設計者射表

在標準狀況下，彈頭出砲口之剎那，亦即內彈道與外彈道間之中間彈道有些狀況是會影響到彈頭彈道軌跡，且是射表所無法顯示的，這就是垂直定起 (Vertical Jump) 與側向定起 (Lateral Jump)，其形成原因非常複雜，影響到彈頭出砲口之起始條件，但一般被忽略。同在標準狀況下，作用在彈頭上之空氣動力、重力、慣性力等均為一標準常數值，並依此計算出標準彈道。但是，彈頭飛行中有許多狀況會偏離標準彈道，其中主要的影響力為重力及空氣阻力，其他尚有漂移、陣風、空氣密度等影響因素。前述這些影響彈頭軌跡的狀況，如氣候、重力、發射藥特性、空氣密度、空氣溫度、漂移、陣風等統稱為非標準狀況，除發射藥特性與人為因素有關，其他非標準狀況皆為非人為因素，但是非人為之非標準狀況在標準狀況為白色雜訊，在砲令射控中得以使用補償修正方式予以克服。如上所述，建立機動目標數學模型必須滿足以下兩個條件：一是模型要準確表達目標運動的真實狀況，使模型假定引起的誤差 (即模型誤差) 在允許的範圍內。二是

模型要儘可能地簡單，以便進行即時處理。同時建立目標運動數學模型還要考慮濾波和預測的具體狀況。在取樣速率一定時，數學模型愈複雜，濾波收斂愈慢，也就是說，在樣本數量一定的條件下，目標數學模型過於複雜反而會使濾波和預測誤差增大，因此需要在模型誤差和濾波誤差之間做進一步的權衡，才能達到總體誤差最小的目的。砲令射控中彈頭運動與一般戰術目標運動的濾波和預測問題不同，彈頭的運動中沒有人為的機動，其他隨機機動的影響也很小，在環境參數已知的情況下，可以用剛體彈道方程準確描述彈頭的運動，這在外彈道學中已有詳細的論述。但是這不意味著我們可以用剛體彈道微分方程組來作為砲令射控的數學模型，因為它過於複雜且有太多的待定參數，不滿足關於需要模型的第二個要求。另由於測量的數據量比較少，反而使這樣的模型之算法複雜化。同樣的道理，降階的剛體彈道方程和修正的質點彈道方程也不宜被採用。二自由度質點彈道方程式由於形式簡單，同時也能較準確地描述彈頭的運動軌跡，因而在傳統火砲彈道計算中經常被使用。由於只考慮彈頭飛行的直線段，飛行時間短，攻角影響小，因而採用二自由度的直點彈道方程作為傳統快砲觀測、瞄準與射擊的數學模型，是完全能夠滿足精度要求的，但是二自由度質點彈道方程不僅是非線性的，而且沒有明顯解，只能用數值積分法來求得它的數值解，因此就需要較多的計算時間，另外它的各參數之間是相關聯的，這就需要採用很複雜的數值處理方法，如 Chapman-Kirk 參數微分法。因此，除非進行一定程度的簡化，二自由度質點彈道方程也很難應用於需即時處理之砲令射控。

綜上所述，在彈頭軌跡的即時濾波和預測問題中，使用微分方程組型式的彈道方程，無論是剛體的、降階剛體的，還是質點的、修正質點的軌跡方程，都是不適宜的，必須尋找其它的途徑。在一般的動目標濾波和預測問題中，經常採用的有一階多項式 (等速) 模型、二階多項式 (等加速度) 模型和隨機加速度模型。在彈頭的運動中，隨機加速度的影響很小。因此無須採用隨機加速度模型。問題轉化為在上述的濾波及預測問題的特定條件下能否用等速模型或等加速度模型來作為彈丸運動的數學模型？對實際彈道數據的計算證明了上述假設，使得問題大大簡化。

目前比較完整的控制理論均是針對線性系統，其實自然界存在的線性系統非常的稀少，吾人所謂的線性系統，通常是非線性系統經過線性化的結果。根據泰勒展開定理，任一非線性函

數，只要其各階導數存在並有限，就可以用一多項式級數的型式充份地逼近；彈頭的運動軌跡顯然滿足這一條件。

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (1)$$

$$\dot{y} = h(x, u, t) \quad (2)$$

(1)式為動態方程式、(2)式為量測方程式；今在平衡點 $P(x_0, u_0)$ 處做線性化處理[28]，則得出

$$\dot{x} = f(x_0, u_0, t) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \Delta u \quad (3)$$

$$u = Ax + Bu$$

$$\dot{y} = h(x_0, u_0, t) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \Delta x + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \Delta u \quad (4)$$

$$u = Cx + Du$$

上式中，是以標準參考彈之彈道軌跡作為平衡點 $P(x_0, u_0)$ 選用。設計者射表秉持此一概念而衍生出來，其建構模型如圖 2；為說明作法，圖 2 中先以二維座標固定方位（迴旋）角場景表達，原理為獲取標準狀況下彈道軌跡設定平衡點，於戰術環境下實際射擊時，彈道軌跡雖然偏離標準

設定平衡點，但偏離量侷限在一小範圍內，而且可以用砲口初速差異值(Difference Muzzle

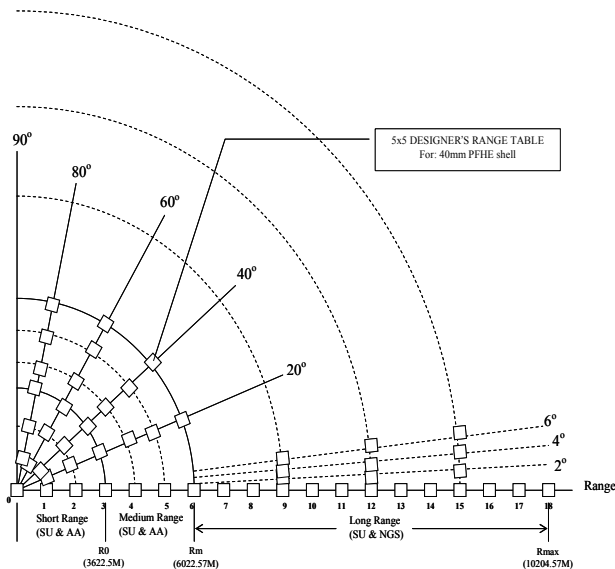


圖 2.設計用射表全涵蓋面製作概念。

Velocity, ΔMV)與彈道係數變量(%BC)，來求出與誤失距離間之線性化關係，再利用該二項為輸入項(Input)，取涵蓋面之點的彈道數據作外推，

設定平衡點，但偏離量侷限在一小範圍內，而且可以用砲口初速差異值(Difference Muzzle Velocity, ΔMV)與彈道係數變量(%BC)，來求出與誤失距離間之線性化關係，再利用該二項為輸入項(Input)，取涵蓋面之點的彈道數據作外推，外推的方法是採用 5x5 外推工作表，表示如圖 3；在圖 3 運用中，誤差修正(Error Correction)以 EC(i) 表示，分別代表 EC(1)= AP(Angle of Projection)；EC(2)= APV (Average Projection Velocity)；EC(3)= VH (Vertex Height)；EC(4)= DF (Drift)；。今假設 x 變量為彈道係數變量(%BC)，y 變量為砲口初速差異值(ΔMV)，則誤差修正值 EC(i)可由以下通式表示

$$EC(i) = A_i + (B_i + D_i x + F_i y)x + (C_i + E_i y)y; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

上式中 A,B,C,D,E,F 為待定之係數 [29~34]；經展開後，可以通式表示

$$EC(i) = A_i + B_i x + C_i y + D_i x^2 + E_i y^2 + F_i xy; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (6)$$

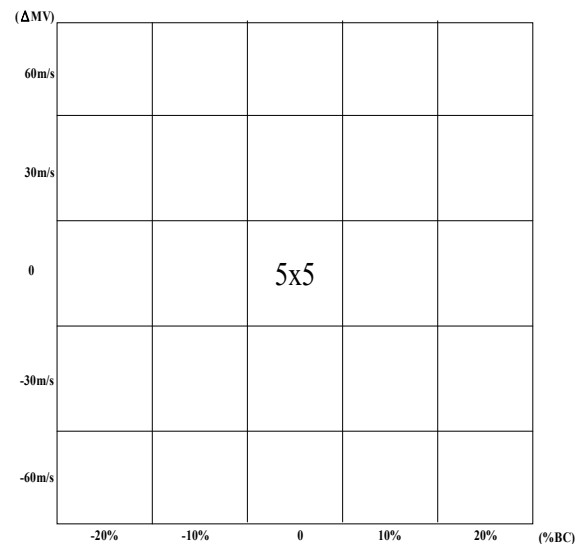


圖 3.設計用射表 5x5 外推工作圖。

設計者射表是選定特定的一個合成距離 (Synthetic Range) 與特定的發射角之下，以 % BC 與 ΔMV 來做自變數，以砲口仰角 (AP)、平均彈頭飛行速度 (APV)、彈道頂點高度 (VH)、橫向偏移量 (DF) 等為應變數，這些應變數就是實際設計者射表數學模型中所需之數據。所謂 BC 是將大氣環境因素，諸如大氣密度、溫度、壓力及濕度合併一起考慮的一個數值，BC 愈大表示空氣阻力愈小。所謂 ΔMV 是考慮砲彈射擊的次數，與溫度對於初速的影響。所謂合成距離是為了方便找出所適合之曲線擬合來產生全面性涵蓋面所定之參數。(6)式又稱二階射表，式中 ΔMV 、% BC 係供修正彈著用，且 ΔMV 與 %BC 之間存在耦合關係 (Coupling)。

3.4 擴增設計者射表

設計者射表是在幾個特定的合成距離與發射角所構成之平衡點來製作，對於使用與原廠不同的彈藥或配賦其他程式彈藥，即改變了平衡點，要重新製作新平衡點之設計者射表，是不容易的。利用與設計者射表相同的概念，將穩定區域由終端平衡點改為飛行軌跡；亦即雖然終端平衡點改變超出原設計，但若彈藥外型相同，諸元相同，發射藥性穩定，其軌跡均收斂於一軌道內，符合軌道穩定理論 (Orbit Stability) [35、36]。具體的計算過程是在實際彈道數據中取 8 個點的彈道數據作為樣本，對斜距離、高低 (俯仰) 角、方位 (迴旋) 角三個座標值分別進行擬合，並用擬合得到的係數進行外推。擬合的誤差作為濾波誤差，外推的值與實際彈道數據的差值作為預測誤差。擬合所用的數學模型可假設為 m 次多項式，

$$p(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \quad (7)$$

其中 $b_0, b_1, \dots, b_m$ 為待定參數，經由量測 n 個數據點，其量測方程式可表為

$$\bar{z} = H\bar{v} \quad (8)$$

其中

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}; \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

可應用最小平方估測 (Least squares Estimation) [37]，而得到最佳的曲線擬合 (Curve fitting) 所需之參數。

四、測評與討論

4.1 設計者射表試驗

火炮射擊控制的目的，就是要發射的彈頭能夠有效的命中目標，但要達成此目的的過程會受到許多因素的影響，除非這些因素都能適當的加以補償，否則很難達到命中目標的目的[38、39]。本文研究使用原廠彈藥射擊目標的情形如表 1，觀察射擊習會#1 目標彈道軌跡之誤差被預測及補償。嗣將原廠彈藥內發射藥脫出，改重新裝填國造發射藥[40~43]，其與原廠彈藥差異處僅為發射藥性能與拔彈力，射擊相同習會#2、#3 目標情形如表 2。由表 2 數據顯示改裝彈藥誤差收斂慢，顯示補償不易正確。另時有嚴重異常現象出現，亦即有初速標準差差異太大，超出原廠規格甚多，使彈著未落入雷達目標追蹤閘，無法連續追蹤鎖定射擊，必須重新開始追蹤鎖定射擊。

表 1 原廠彈藥斜距離、高低角及平衡時間實測模型誤差 (設計者射表)

目標 編號	彈道 編號	斜距(單位：m)		高低角(單位：°)		平衡時間(Sec)	
		Predict	MD	Predict	Error	Predict	Error
#1	1@#1	3408	19.1	21.36	0.05	15.146	0.1
	2@#1	4288	3.7	22.81	0.02	19.242	0.07
	3@#1	3938	1.2	22.39	0.001	17.59	0.01
	4@#1	4038	0.3	22.39	0.000	18.06	0.005
	5@#1	3988	0.0	22.39	0.000	17.825	0.000

表 2 比對彈藥斜距離、高低角及平衡時間實測模型誤差（設計者射表）

目標 編號	彈道 編號	斜距(單位：m)		高低角(單位：°)		平衡時間(Sec)	
		Predict	MD	Predict	Error	Predict	Error
#2	1@#2	3408	19.1	21.36	0.05	15.146	0.3
	2@#2	4269	15.8	22.81	0.03	19.242	0.1
	3@#2	3923	14.7	22.39	0.03	17.59	0.1
	4@#2	4020	10.4	22.39	0.03	18.06	0.06
	5@#2	3998	5.3	22.39	0.03	17.825	0.07
	6@#2	4007	9.8	23.01	0.02	18.07	0.08
	7@#2	3957	5.6	23.12	0.02	18.05	0.05
	8@#2	3946	4.2	23.12	0.02	18.04	0.02
	9@#2	4018	3.1	23.12	0.01	18.06	0.01
	10@#2	3996	0.5	23.12	0.00	17.83	0.00
#3	1@#3	3409	19.1	21.36	0.05	15.146	0.1
	2@#3	4290	3.8	22.81	0.02	19.242	0.07
	3@#3	3958	1.6	22.39	0.001	17.59	0.01
	4@#3	4038	0.3	22.39	0.000	18.06	0.005
	5@#3	3408	29.6	21.36	0.5	15.146	0.18
	6@#3	4298	13.9	22.81	0.02	19.242	0.07
	7@#3	3978	6.2	22.39	0.001	17.59	0.04
	8@#3	4058	3.3	22.39	0.003	18.06	0.05
	9@#3	3998	0.5	22.39	0.000	17.825	0.000

4.2 擴增設計者射表試驗

計算結果簡要地列在表 3 至表 6 中，其中預測的最大誤差是外推 120m 時的誤差。由表 3 至表 6 的數據可以看出，用多項式模型可以很好地逼近彈道的三個座標。更重要的是，對彈道座標的三個分量為斜距離、高低角和方位角可以分開處理，不需進行座標變換或聯合處理，這就隔離了隨機誤差的關聯，使濾波和預測算法簡化，也提高了濾波和預測的效果。而且，從表 3 至表 6 的數據可以看出，對斜距離、高低角和方位角這三個座標分量可以使用不同階數的多項式進行處理。對斜距離而言，若使用一階多項式作為數學模型，則預測的最大模型誤差為 2m (擬合點數為 8 時) 或 4.2m (擬合點數為 16 時)，誤差偏大；若使用二階多項式作為數學模型，則預測的最大模型誤差為 0.08m，與雷達的測量誤差 15m (rms) 相比，這顯然是微不足道的。這也說明，擬合點數不同，則模型的誤差也不同。具體作法上選擇幾個擬合點(即濾波點)、選用幾階模型應和濾波及預測算法共同考慮。對高低角而言，選擇零階

模型的誤差太大，而選用一階模型就可以達到較高的精度，最大模型誤差為 0.0011⁰，比雷達測量的誤差小兩個階數級。最簡單的是方位角數據，用零階模型(即常數模型)就可以實現較高的精度，預測最大的模型誤差為 0.0081⁰，比雷達測量的誤差小一個階數級以上。但是，在表 6 中僅考慮了偏流引起的方位角變化。在存在橫風時，方位角的模型誤差還是與橫風的大小有關。為了能直接地比較存在橫風時的誤差情況，表 7 列出了橫風速度 10m/s 時的濾波和預測誤差。從表 7 可以看出，60⁰ 以下彈道的模型誤差較小，75⁰ 彈道的模型誤差稍大，但都比方位角的測量誤差小的多。其中，大射角時誤差大的原因在於採用的座標系和度量單位。因為大射角時彈道在水平面上的投影很小，方位上微小的距離變化就對應一個很大的方位角。如果以距離單位來衡量，各個角度的誤差是基本相同的。這說明在正常作戰條件下，仍然可以採用常數模型。如果要求更高的精度，可以考慮採用一階模型。初步計算證實，一階模型的模型誤差小於 0.001⁰。

表 3 一階斜距離濾波與預測最大模型誤差（擴增設計者射表）

擬合 點數	斜距	一階模型（單位：m）						
		射角	5°	15°	30°	45°	60°	75°
8	2000	濾波	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
		預測	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
	3000	濾波	0.17	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16
		預測	2.00	2.00	2.00	1.90	1.90	1.90
	4000	濾波	0.14	0.14	0.13	0.13	0.13	0.13
		預測	2.00	2.00	2.00	1.90	1.90	1.90
	5000	濾波	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11
		預測	2.00	2.00	1.90	1.90	1.90	1.90
16	2000	濾波	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		預測	4.20	4.20	4.20	4.10	4.10	4.10
	3000	濾波	0.82	0.81	0.80	0.79	0.79	0.79
		預測	3.80	3.70	3.60	3.60	3.60	3.60
	4000	濾波	0.68	0.67	0.65	0.64	0.64	0.63
		預測	3.6	3.6	3.5	3.4	3.4	3.3
	5000	濾波	0.56	0.54	0.53	0.52	0.51	0.51
		預測	3.40	3.30	3.30	3.20	3.20	3.10

表 4 二階斜距離濾波與預測最大模型誤差（擴增設計者射表）

擬合 點數	斜距	二階模型（單位：m）						
		射角	5°	15°	30°	45°	60°	75°
8	2000	濾波	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		預測	0.03	0.02	0.03	0.03	0.02	0.03
	3000	濾波	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		預測	0.01	0.03	0.02	0.03	0.01	0.03
	4000	濾波	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		預測	0.01	0.03	0.03	0.05	0.04	0.03
	5000	濾波	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		預測	0.05	0.02	0.01	0.05	0.05	0.01
16	2000	濾波	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
		預測	0.06	0.07	0.07	0.07	0.09	0.08
	3000	濾波	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01
		預測	0.05	0.06	0.05	0.06	0.06	0.07
	4000	濾波	0.01	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00
		預測	0.03	0.04	0.05	0.05	0.03	0.06
	5000	濾波	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
		預測	0.07	0.08	0.04	0.04	0.07	0.05

表 5 二階高低角濾波與預測最大模型誤差（擴增設計者射表）

擬合 點數	斜距	二階模型（單位：°）						
		射角	5°	15°	30°	45°	60°	75°
8	2000	濾波	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
		預測	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.02	0.0001
	3000	濾波	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
		預測	0.0004	0.0005	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002
	4000	濾波	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
		預測	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002
	5000	濾波	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
		預測	0.0006	0.0006	0.0007	0.0006	0.0005	0.0003
16	2000	濾波	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001
		預測	0.0007	0.0007	0.0008	0.0007	0.0005	0.0003
	3000	濾波	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001
		預測	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0005	0.0003
	4000	濾波	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
		預測	0.0009	0.0010	0.0010	0.0009	0.0007	0.0004
	5000	濾波	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
		預測	0.0010	0.0011	0.0011	0.0011	0.0008	0.0004

表 6 零階方位角濾波與預測最大模型誤差（擴增設計者射表）

擬合 點數	斜距	常數模型（單位：°）						
		射角	5°	15°	30°	45°	60°	75°
8	2000	濾波	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
		預測	0.0033	0.0031	0.0031	0.0034	0.0034	0.0031
	3000	濾波	0.0011	0.0011	0.0011	0.0015	0.0015	0.0015
		預測	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
	4000	濾波	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016
		預測	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019
	5000	濾波	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018
		預測	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
16	2000	濾波	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028
		預測	0.049	0.049	0.049	0.049	0.049	0.050
	3000	濾波	0.031	0.0031	0.0031	0.032	0.032	0.032
		預測	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.058
	4000	濾波	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035
		預測	0.068	0.068	0.068	0.068	0.068	0.068
	5000	濾波	0.039	0.039	0.039	0.039	0.039	0.039
		預測	0.081	0.081	0.081	0.081	0.081	0.081

表 7 橫風 10m/s 方位角濾波與預測最大模型誤差（擴增設計者射表）

擬合 點數	斜距	常數模型（單位：°）						
		射角	5°	15°	30°	45°	60°	75°
8	2000	濾波	0.003	0.003	0.004	0.004	0.006	0.012
		預測	0.008	0.008	0.009	0.011	0.015	0.029
	3000	濾波	0.004	0.004	0.004	0.005	0.006	0.012
		預測	0.09	0.09	0.010	0.012	0.017	0.032
	4000	濾波	0.004	0.004	0.004	0.005	0.006	0.012
		預測	0.010	0.010	0.011	0.013	0.017	0.032
	5000	濾波	0.004	0.004	0.004	0.004	0.006	0.011
		預測	0.011	0.011	0.012	0.013	0.018	0.034
16	2000	濾波	0.007	0.007	0.007	0.009	0.013	0.024
		預測	0.011	0.012	0.012	0.015	0.021	0.042
	3000	濾波	0.007	0.007	0.008	0.010	0.013	0.025
		預測	0.013	0.013	0.014	0.017	0.023	0.044
	4000	濾波	0.007	0.007	0.008	0.009	0.012	0.024
		預測	0.014	0.0142	0.015	0.017	0.023	0.045
	5000	濾波	0.007	0.007	0.008	0.009	0.012	0.023
		預測	0.015	0.014	0.016	0.018	0.024	0.045

五、結論

綜上所述，可以用簡單數學式寫出所選用數學模型：

$$\text{斜距離： } D_i = D_0 + at_i \quad (\text{一階模型}) \quad (10)$$

$$D_i = D_0 + at_i + bt_i^2 \quad (\text{二階模型}) \quad (11)$$

$$\text{高低角： } \theta_i = \theta_0 + ct_i \quad (12)$$

$$\text{方位角： } \gamma_i = \gamma_0 \quad (\text{常數模型}) \quad (13)$$

$$\gamma_i = \gamma_0 + dt_i \quad (\text{一階模型}) \quad (14)$$

上述 $i=1,2,\dots,n$ 即顯示吾人所選用的彈道模型，不僅模型誤差在允許的範圍以內，而且形式簡單，可簡化算法，為快速濾波和預測建立基礎。必須注意的是，此彈道模型是針對半閉迴路砲令射控而建立，限於符合軌道穩定理論及彈道線性段內的彈道，如果要處理飛行時間更長的彈道，這裏的模型不適用。

所謂標準狀況即原廠砲令射控軟體中的極小區域內，某種特定情況下火砲之斜距-仰度之相對應值，及其他彈道諸元之值。因為地心引力、空氣阻力及火砲定起現象等地域因素與發射藥特性等人為因素使現況與原廠設定之標準狀況有所差異，會使彈道軌跡偏離原設計之平衡點，原廠砲令軟體無法涵蓋。在此狀況下，由觀察知，現狀系統雖不能完全沿用原廠平衡點理論，但能適用軌道穩定理論；故將原設計射表擴充，把非標準狀況在可接受之範圍內予以調適、擬合，以對彈道偏差實施補償；經實驗，證明可行。

參考文獻

- [1] Singer, R. A., and Behnke, K., "Real-time Tracking Filter Evaluation and Selection for Tactical Application," IEEE Trans. On Aerospace and Electronic System, Vol. AES-7, NO. 1, 1971.
- [2] Quigley, A., "Tracking and Associated Problems," IEEE conference on radar-present and future, London, 1973.
- [3] Benedict, T. R., "Synthesis of an Optimal set

- of Radar Track-While-Scan Smoothing Equation,” IRE Trans. On Automatic Control, 1962.
- [4] Cantrell, B. H., Trunk, G. V., Queen, F. D., Willson, J. D., and Alter, J. J., “Automatic Detection and Integrated Tracking System,” The Record of the IEEE Faternational Radar Conference, New York, 1975.
- [5] Hovanessian, S. A., Radar Detection and Tracking System, Artech House. 1978.
- [6] Simpson H. R., “Performance Measures and Optimization Condition for a Third-Order Sample Data System,” IRE Trans. on Automatic Control, 1963.
- [7] Frienden, D. R., Principles of Naval Weapons System, Naval Institute Press, 1985, Chap. 19.
- [8] 鄭芳田, “火神中小型精密火炮射控系統研製計畫(預測器計畫)結果報告”, 中山科學研究院第三研究所, 中華民國 75 年 6 月。
- [9] 陳錦漳、查忠鴻、胡志遠、蕭劉順、鄭盛發、林忠弘、鄭芳田, “砲令射控與追蹤架構”, 中山科學研究院第三研究所, 中華民國 75 年 6 月。
- [10] 鄭芳田, “追蹤濾波器之總整理”, 中山科學研究院第三研究所, 中華民國 75 年 6 月。
- [11] 趙嘉琦, “人機介面非線性現象影響二〇公厘雙聯裝機砲穩定迴路設計之研究”, 中正理工學院兵器系統工程研究所碩士論文, 中華民國 85 年。
- [12] 吳錦富, “海用二〇公厘雙聯裝機砲穩定控制伺服迴路設計”, 中正理工學院兵器系統工程研究所碩士論文, 中華民國 85 年。
- [13] 李守誠、劉正瑜、吳錦富, “艦載國造二〇公厘雙聯裝機砲穩定控制系統之設計”, 中正嶺學報, 26 卷 1 期, 中華民國 86 年 7 月。
- [14] 王國政, “國造二〇公厘雙聯裝機砲滾轉控制迴路設計及模擬”, 中正理工學院兵器系統工程研究所碩士論文, 中華民國 86 年。
- [15] 李守誠、劉正瑜、王國政, “國造二〇公厘雙聯裝機砲滾轉控制迴路設計及模擬”, 中正嶺學報, 26 卷 2 期, 中華民國 87 年 1 月。
- [16] 鄭澄國、高阿福、苗志銘、戴昌賢, “穿音速飛行 20mm 彈體流場之數值模擬”, 火藥技術, 19 卷 1 期, 中華民國 92 年 3 月。
- [17] 戴昌賢、孫維新、苗志銘、王定三, “中口徑彈藥外彈道分析之數值技術”, 火藥技術, 14 卷 2 期, 中華民國 87 年 9 月。
- [18] 戴昌賢、羅四維, “數值模擬--計算流體力學於國防工業之運用”, 軍品科技新知, 104 期, 中華民國 87 年 5 月。
- [19] 林彥鈞, “應用 π 分配理論設計於弦波地形上行進坦克車砲塔之控制器”, 國立台灣大學電機研究所碩士論文, 中華民國 92 年。
- [20] 許清泉, “弦波型路面上坦克車砲塔轉動控制系統之設計與車體動態模式之建立及動畫模擬”, 國立台灣大學電機研究所碩士論文, 中華民國 91 年。
- [21] 葉全祥, “考慮齒輪間隙的二軸跑砲塔系統之非線性適應控制”, 國立台灣大學電機研究所碩士論文, 中華民國 84 年。
- [22] 劉志文, “雙軸馬達驅動機砲砲臺之強健性穩定伺服控制”, 國立台灣大學電機研究所碩士論文, 中華民國 85 年。
- [23] 鈕健、劉瑞榮, “戰車火炮穩定系統數學模式之建立及射擊時受承載系統性能影響之分析”, 中正嶺學報, 20 卷 2 期, 中華民國 81 年 1 月。
- [24] Lee, S. C., and Liu, C. Y., “Preliminary Design of Tracking Loop for Marine-Used Machine Gun,” Defence Science Journal, Vol. 49, No. 2, 1999.
- [25] 黃振國, “雙軸馬達驅動機砲之智慧型追蹤射控系統”, 國立台灣大學電機研究所碩士論文, 中華民國 85 年。
- [26] 陳治宇, “以智慧型單眼即時影像追蹤系統與飛機姿態辨識為基礎之目標物武惟軌跡檢測”, 國立台灣大學電機研究所碩士論文, 中華民國 87 年。
- [27] 傅立成、徐志翰、馮蟻剛、顏家鈺、蔡銘昌、郭德盛、劉福晟、謝明益, “雙聯裝二〇機砲砲車伺服控制期末報告”, 臺灣大學慶齡工業中心, 中華民國 84 年 1 月。
- [28] Kuo, B. C., and Golnaraghi, F., “Automatic Control Systems”, 8th Edition, John Wiley & Sons, INC., Chap.4, 2002.
- [29] 吳英泰, 非線性理論, 中正理工學院兵器系統工程研究所飛彈組講義, 中華民國 84 年 3 月。
- [30] 孔健君, 強健控制理論, 國防大學中正理工學院國防科學研究所兵器組講義, 中華民國 92 年 2 月。
- [31] 孔健君, 非線性系統理論, 國防大學中正理工學院國防科學研究所兵器組講義, 中華民國 93 年 1 月。
- [32] 孔健君, H_{∞} 控制理論與應用, 國防大學中正理工學院國防科學研究所兵器組講義, 中華民國 93 年 1 月。

- [33] 趙嘉琦，“發射藥特性對砲令射控之影響”，國防大學中正理工學院國防科學研究所兵器組研究進修計畫，中華民國 89 年 4 月。
- [34] 趙嘉琦，“發射藥特性對砲令射控之影響”，國防大學中正理工學院國防科學研究所兵器組研究進修計畫簡報，中華民國 89 年 5 月。
- [35] Meirovitch, L., “Methods of Analytical Dynamics”, p. 177, 1970.
- [36] 董亮、黃宗虎、越子華、馬素珍編著，彈箭飛行穩定性理論及其應用，兵器工業出版社，1990，第 28 頁。
- [37] Mendel, J. M., Lessons in Estimation Theory for Signal Processing, Communications, and Control, Prentice Hall International, Inc., U.S.A. (1995), pp. 44-45.
- [38] 趙中行、伍世文、方鵬飛，海軍兵器系統基本原理，海軍總司令部，中華民國 79 年 3 月，第十九章。
- [39] 陳積德，火砲射控系統概論，火砲概論（下冊），火砲技術手冊，聯勤第二 0 二廠，中華民國 76 年。
- [40] 楊清龍，“爆彈儀測試對阻燃性發射藥燃燒特性之探討及應用”，技術精進（第一輯），聯勤第二 0 三廠，中華民國 74 年 9 月。
- [41] 周清河，“40/70 HE-T 發射藥測試檢討報告”，技術精進（第二輯），聯勤第二 0 三廠，中華民國 76 年 5 月。
- [42] 方聰然，國造 40 公厘 PFHE 發射藥製造現行標準作業程序手冊，軍備局第二 0 三廠，中華民國 97 年 1 月。
- [43] 方聰然，國造 40 公厘 PFHE 發射藥檢驗現行標準作業程序手冊，軍備局第二 0 三廠，中華民國 97 年 1 月。