

不完美生產系統下生產期間與維修保證之研究

鍾政良¹ 侯國隆²

¹ 國防大學管理學院資源管理研究所 ² 僑光技術學院管理研究所

摘 要

傳統經濟製造批量模式上，一般假設生產製程是完美的，且無不良品產生，但實際上不良品的產生是無法避免的。當生產製程出現不良品且必須重製時，將會增加不良品的重製成本。產品維修保證已成為廠商不可或缺的售後服務之一，也增加了產品的保證成本，故有學者將生產與售後維修一併納入考量。本文假設不完美生產系統具退化情形，並服從指數分配，考量在期望總成本最小的原則下，建立一個數學模式，並透過對該模式求解，找出最佳生產期間，發現在單位總成本最小化的目標函數下，生產期間有唯一的最佳解。最後，以數值範例進行驗證，發現模式加入重製成本後，最佳生產期間和單位總成本均明顯增加，可見得重製成本的重要，希望提供國軍生產製造中心與民間製造商擬訂生產期間之決策參考。

關鍵詞：不完美生產系統、重製、保證、經濟製造批量。

The Production Run Length and Repair Warranty with An Imperfect Production System

Cheng L. Chung¹ Kuo L. Hou²

¹Graduate School of Resources Management and Decision Science, Management College, National Defense University

²Graduate School of Management, Overseas Chinese Institute of Technology

ABSTRACT

In the past, those scholars who made a study of the optimal cycle time often presumed that the production process was perfect which implied the defective product would not be produced. However, the production of the defective product was unavoidable. When the defective products appear, they must be reworked in the production process, the rework cost increases from this. The repair warranty of the products was one of manufacturer's indispensable after-sale services, but the warranty cost increases at the same time. In the past years, the question of production and warranty had already jointly in scholar's discussion. In this paper, we assume that the failure rate of the imperfect production system follows an exponential distribution. A mathematical model is developed to determine the optimal production run length with the expected minimum cost per item. Finally, a numerical example is given to illustrate the results, and offer the administrators of Materiel Production and Manufacturing Center or civil industries making decision.

Keywords : Imperfect production system; rework; Warranty; EMQ.

壹、前言

過去學者對於解決經濟製造批(Economic Manufacturing Quantity, EMQ)問題之方法，大多假設生產系統是完美的生產製程，在完美生產過程無不良品出現，所生產之產品品質規格都符合要求。但是在實際生產過程中，不良品之產生是無法避免的。因此，有很多學者已針對不完美生產系統之經濟製造批量相關問題進行研究與不斷延伸，期望更符合生產系統的實際情形，藉以求得最佳的製造批量。許多學者均假設不完美生產系統可將生產系統區分為控制(in-control)與失控(out-of-control)兩種狀態，控制狀態所生產的產品，會符合品質標準。一旦生產系統因為零件腐蝕、機器疲勞及磨損等使用方式或年限的因素，會產生持續性衰退的現象，使生產系統由控制狀態轉換為失控狀態，就會產生不良品，當不良品出現且必須加以重製時，將增加不良品的重製成本(Lee, 1992; Lee, and Park, 1991; Lee, and Rosenblatt, 1987; Lin, and Hou, 2005; Porteus, 1986)。

另一方面，產品保證是指特定產品的銷售與購買行為發生之際，買賣雙方透過保證契約的規範，明訂彼此在產品之保證期內，所應履行之義務與權利的相關條款。產品在正常使用的條件下，若於保證期內發生故障，買方有權力依據保證契約中相關條款的規定，向賣方提出索賠的要求。當產品發生故障或是不能完全達到產品的功能時，保證就會促使製造商必須修理或更換一個新的產品給消費者，而消費者則可能需負擔一些合理的成本，或是根本不需要花費任何費用。製造商因為提供售後的產品保證服務而發生保證成本，保證成本的高低，會直接反映在產品的利潤或售價上，因此，製造商必須將產品在保

證期間內可能發生的保證成本降到最低。

以往的研究大多只單方面考慮產品在生產階段的成本模式(Chung, and Hou, 2003; Djameludin, et al., 1995; Hong, 1997; Lee, 1992; Lee, and Park, 1991; Lee, and Rosenblatt, 1987; Lin, et al., 2003; Lin, and Hou, 2005; Ougang, and Chang, 2000; Porteus, 1986; Schwaller, 1988)，或針對產品售後在不同保證策略下的成本模式(Glickman, and Berger, 1976; Lam, and Lam, 2001; Nguyen, and Murthy, 1984)。至於結合產品售前的生產階段與售後的保證服務之綜合考量，則在最近幾年才受到較多的重視(Chen and Lo, 2006; Wang, 2004; Yeh, et al., 2000)。因此，本文針對此一主題假設一個不完美生產系統的衰退情形服從指數分配，當生產系統由控制狀態轉換為失控狀態時，就會產生不良品，製造商在每一個生產週期結束之後，將立即對生產系統進行檢查並實施預防保養，如果檢查出生產系統為失控狀態時，立即將生產系統恢復到控制狀態，才能開始進行下一次的生產週期，而所檢測出來的不良品必須經過重製的過程，才能夠銷售出去。產品售後在保證期間內，因為正常使用狀況下發生的故障或損壞，所產生的維修保證成本一律由製造商負責承擔。因此，本文考量產品的重製成本及保證成本，建立一個整合的成本模型，在期望總成本最小的原則下，找出最佳生產期間，並討論其相關性質。

綜合上述，可以知道產品的檢測、重製和售後保證對於製造商的成本有相當大的影響。本研究的目的是在於提供一個成本模型，能夠協助製造商在追求製造高品質產品的條件之下，仍然可以達到總成本最低的目標。因此，本論文同時考慮在不完美的生產系統下有不良品產生且需重製加工，以及產品銷售後在保證期限內的免費維修保證成本，進行其經濟製造批量模

式的構建，以求得最佳的生產期間，亦即在此生產期間，可使總成本降至最小，並獲得最大的經濟效益，使生產管理的理論更能符合實際的應用。

貳、文獻探討

本文主要研究在不完美生產系統下考慮重製與免費維修保證的經濟製造批量模型，主題研究領域區分為不完美的生產系統、具重製製程之生產系統、產品維修保證等三個部分來加以探討，主要根據過去學者研究之成果，擷取與本研究具有相關性之文獻，作一整理分析，以為本研究的依據。

一、不完美的生產系統

經濟製造批量 (Economic Manufacturing Quantity, EMQ) 的問題廣受學者們的注意，傳統的經濟製造批量模式總是假設所訂購的原物料的品質是完美的，且生產系統不會隨著時間而變差，所生產的產品品質都是符合標準的。然而實際上，隨著操作時間增加，生產系統可能因為零件腐蝕、機器疲勞及磨損的累積等使用方式或使用年限的因素，無法在整個生產週期內一直保持完美的狀態，而由控制狀態轉變為失控狀態，使得產品品質下降，開始生產不良品，甚至有時因產品不良率過於嚴重，必須作出停止生產工作之決策。因此，陸續有各家學者針對不完美生產系統產生之不良品進行研究。

Porteus (1986) 假設當生產出一個產品後，都會存在一固定的機率，使得生產系統由控制狀態轉變為失控狀態，而當製程處於失控狀態時，則會不停地產生不良品。其後，Lee and Rosenblatt (1987) 假設：生產系統由控制狀態轉變為失控狀態的時間，是一隨機變數且符合指數分配，考慮生產系統中有關不良品、檢驗策略及生產週期，推導出近似的最佳生產週期。Schwaller (1988) 也認為實際的生產過程

必定會有不良品的產生，並假設不良率為一已知固定的比率。Djamaludin et al. (1995) 則假設在失控狀態產生不良品的機率高於控制狀態，研究最佳製造批量。

Hong (1997) 探討不完美生產系統的生產週期與採購計畫，假設在失控狀態會持生產固定比例的不良品，直到下一次整備為止，並假定退化率服從指數分配。Ouyang and Chang (2000) 假設不完美生產系統下，經濟製造批量的前置時間是變動的，並尋求其最佳生產週期。Chung and Hou (2003) 探討不完美生產系統在允許缺貨的情形下，生產過程一旦轉換為失控狀態，將持續生產至生產週期結束為止，並求取其最佳製造批量。

綜合上述文獻，大多使用指數分配來描述不完美生產系統 (Chung, and Hou, 2003; Hong 1997; Lee, and Rosenblatt, 1987)，並假定在系統轉換為失控狀態時，不良品產生的機率都是固定的 (Chung, and Hou, 2003; Djamaludin, et l., 1995; Lee and Rosenblatt, 1987; Porteus, 1986; Schwaller, 1988)。

二、具重製製程之生產系統

具重製製程之生產系統的相關文獻並不多，可見於下述研究，Porteus (1986) 假設系統為了所生產的每一個不良品，將額外衍生出重製等相關作業成本。Lee (1992) 透過半導體廠中不良品之測試研究，考慮不良品可重製 (rework) 的生產系統，藉由最小化總加工時間決定其最佳製造批量。Lee and Park (1991) 延伸不完美生產系統的經濟製造批量模型，提出兩種成本：即重製成本和保證成本，認為在生產週期中會產生不良品，不良品在運送出去之前，必須以某種成本重製；若是不良品已交給顧客，則會因商譽損失，衍生更龐大的保證成本。Lin et al. (2003) 探討在不完美生產系統下，原物料與完成品的混合存貨模式，考慮不良品可以重製方式修

復。Lin and Hou (2005) 在總成本中加入了重製成本，探討最小總成本下的最佳生產期間，並導出最佳生產期間的範圍。

三、產品維修保證

產品保證是廠商提供給消費者的一種契約(warranty)，這已變成是競爭激烈的消費市場裡一個重要的致勝關鍵。在契約所規定的保證期限內，製造商有責任對產品進行維護及修理。從廠商的觀點，保證是產品品質的象徵，與產品行銷的重要因素；以消費者觀點，保證代表賣方對於消費者權益的保障，同時也是購買商品前的重要考量因素。由於保證對於買賣雙方的重要性，因此吸引許多學者的研究興趣，本節回顧整理過去學者研究免費維修保證議題之文獻，藉以了解相關領域的研究成果。

Glickman and Berger (1976) 考慮產品於保證期內失效，皆由賣方提供免費小修保證的策略下，分析賣方之利潤最大化成本模式。Nguyen and Murthy (1984) 探討在保證期內製造商須負責所有故障之修理成本下，產品於保證期內回來修理的期望次數和期望保證成本。Chun (1992) 將主動維護的觀念應用在保證策略的研究上，在保證期內，賣方除了在產品發生故障時給予免費小修理外，更提供數次週期性的不完美預防保養，求得最佳預防保養次數，並以韋伯分配為數值範例來做說明。Yeh et al. (2000) 研究具免費維修保證的退化產品系統，證明存在唯一的最佳運作時間，能夠使成本最低。

另外，Lam and Lam (2001) 探討包含免費維修期間與延伸保證期間的可延伸保證模式。Wang (2004) 研究在不完美生產系統下，免費維修保證之產品的經濟製造批量，認為生產器具的累積損耗程度，會造成產品失效率的增加，而非如過去學者假設的為一常數。Chen and Lo (2006) 研究不完美生產系統在允許缺貨的情況下，

考慮系統復原成本和免費維修保證成本的生產存貨模式，並求取最佳生產期間及其範圍，其中假設轉換時間為指數分配。

綜合以上文獻之研究成果，發現不完美生產系統之經濟製造批量研究方面，只有少數文獻有考慮到不良品重製對於總生產成本的影響(Lee, 1992; Lee, and Park, 1991; Lee, and Rosenblatt, 1987; Lin, et al., 2003; Lin, and Hou, 2005; Porteus, 1986)，而且部分探討不良品的文獻，假設在控制狀態的不良率為 0 (Chung, and Hou, 2003; Lee, Rosenblatt, 1987; Porteus, 1986)。然而在實際生產狀況，控制狀態下雖然可以生產較高品質的產品，但並不是所有產品皆會符合規格，只是不良品產生的機率較小，而在失控狀態下的不良率則相對較大。過去研究不完美生產系統的學者，通常不會將系統可能產生的不良品重製成本和產品的保證成本一併考量，而是僅考慮其中一種作法，實際上，有些製造商寧願採取較高或甚至 100% 的產品檢測政策，使不良品必須經過重製之後才能銷售，就是為了避免不良品銷售後所產生的外部失敗成本。本研究為能更符合實際上之應用，假設當可維修產品在保證期間失效時，廠商僅採取修復行動(免費維修保證)，來探討重製成本與免費維修保證成本對於製造商期望總成本的影響。

參、模式建構

本章將同時考慮不完美的生產系統產生不良品且需重製加工，以及售後因為產品失效可能產生的維修保證成本，藉由其各相關成本的模式建構，來建立單位總成本目標函數。

一、問題描述

本研究所探討之生產系統僅考慮生產單一產品，在正式生產之前，經過一個生產系統設置和生產設備保養的動作後，此時的生產系統是處在控制狀態，能夠生產

出符合規格的產品，但是，在一段時間之後，生產系統可能偏移了原先所設計的規格，而製造出不符合規格的產品，由於製造商會對於產品實施全面檢測，這些不良品會在每一個生產週期結束後被檢測出來，不良品必須等批量生產結束後，進行重製加工，才能夠銷售出去。在產品保證期間內，製造商採取免費維修保證政策，當產品失效時，消費者無須負擔任何維修費用，一切費用均由製造商來承擔，而保證期滿後，消費者則需自費實施維修。

假設每一個產品的製造成本為 c_m ，設置成本為 k ，每單位時間每個產品的存貨成本為 h ，每單位時間產品的需求率為 d ，每單位時間產品的生產率為 p ，一般來說， $p > d > 0$ 。生產系統在一段時間 X 之後，可能會由控制狀態轉換為失控狀態，轉換的時間服從指數分配，當轉換到失控狀態後，會一直持續到生產週期結束。在控制狀態時，產生不良品的機率為 θ_1 ，而在失控狀態時，產生不良品的機率為 θ_2 ， $\theta_2 > \theta_1$ ，也就是說，在失控狀態的不良率大於控制狀態的不良率。每個不良品的重製成本為 s 。

在每一次生產週期結束之後，系統會對產品實施全面檢測，同時對生產設備實施保養，檢測及保養成本為 v ，在下一次生產週期開始前系統必須進行設置，當發現系統是處於失控狀態時，必須將系統復原到控制狀態，此時將額外產生復原成本 r 。產品銷售後，製造商提供的保證期限為 w ，而不良品雖然經過重製加工過程，重製後產品的失效率 $h_2(\tau)$ 仍會大於原屬良品的失效率 $h_1(\tau)$ ，每一個產品發生失效後，製造商需負擔的維修成本為 c_r 。

二、參數與假設

本研究中所使用到之參數如下：

p ：單位時間的生產率

d ：單位時間的需求率

X ：生產系統處於控制狀態的時間

c_m ：單位產品的製造成本

k ：生產週期的設置成本

v ：生產週期的檢測保養成本

h ：單位存貨持有成本

s ：單位產品的重製成本

θ_1 ：控制狀態的產品不良率

θ_2 ：失控狀態的產品不良率

w ：保證期限

c_r ：單位產品維修成本

$h_1(\tau)$ ：原屬良品的失效率

$h_2(\tau)$ ：重製後產品的失效率

τ ：期望失效時間

T ：生產週期

t ：生產期間

λ ：生產系統由控制狀態轉換為失控狀態的轉換率

N ：不良品的數量

$q(t)$ ：生產週期內不良品的比例

PC ：售前單位成本

WC ：售後單位成本

$C(t)$ ：單位總成本

主要假設如下：

- (一)單一的生產設備生產單一產品。
- (二)生產率 and 需求率為固定。
- (三)生產週期上的任何一個時間點，不是在控制狀態就是失控狀態。任一狀態都會有各自固定的不良率。
- (四)生產系統一開始都是處在控制狀態。
- (五)生產系統可能從控制狀態轉換至失控狀態，處在控制狀態的時間服從指數分配。
- (六)一旦轉換至失控狀態，將持續到生產週期結束。當生產週期結束時處在失控狀態，在下一次生產週期開始之前，系統會復原到控制狀態，並產生復原成本。
- (七)產品失效時，製造商採取免費維修保證政策。
- (八)不良品之重製過程為一致的，並且是

完全修復，但是品質低於良品。

三、目標函數

本研究的總成本目標函數，主要包括售前成本與售後成本。售前成本中包含製造成本、設置成本、檢測保養成本、存貨持有成本、重製成本及復原成本。售後成本指的是產品免費維修保證成本。在進行目標函數分析前，先將目標函數所考量的成本進行個別分析，以下一一說明。

(一)單位時間每個產品售前成本(pre-sale cost)

1.製造成本(manufacturing cost)

生產每個產品所需的製造成本。

$$c_m \quad (1)$$

2.設置成本(setup cost)

一個生產週期結束後，在下一次生產週期開始前，系統必須進行設置。

$$k/pt \quad (2)$$

3.檢測保養成本(inspection and preventive maintenance cost)

一個生產週期結束後，必須對系統與產品進行全面檢測，以及對生產設備實施保養。

$$v/pt \quad (3)$$

4.存貨持有成本(inventory-holding cost)

存貨在生產期間，因為儲存產生持有成本，由於產品在生產期間 t ，存貨以 $(p-d)$ 的比率不斷增加，最大存貨水準為 $(p-d)t$ ，則整個生產週期所產生的存貨持有成本為

$$(p-d)ht/2d \quad (4)$$

5.重製成本(rework cost)

由於生產過程產生的不良品均須經過重製製程，首先必須計算生產週期內不良品的數量 N ，假設

$$N = \begin{cases} \theta_1 pt & X \geq t \\ \theta_1 pX + \theta_2 p(t-X) & X < t \end{cases} \quad (5)$$

因此，

$$\begin{aligned} E(N) &= \int_0^\infty \theta_1 pt \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_0^t [\theta_1 pX + \theta_2 p(t-X)] \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \theta_2 pt + p(\theta_1 - \theta_2) \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \end{aligned} \quad (6)$$

可以得到重製成本

$$\frac{sE(N)}{pt} = s \left[\theta_2 + (\theta_1 - \theta_2) \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right] \quad (7)$$

6.復原成本(restoration cost)

當生產週期結束時處在失控狀態，必須恢復到控制狀態，才能進行下一次生產週期。

$$r(1 - e^{-\lambda t})/pt \quad (8)$$

綜合上述(1)、(2)、(3)、(4)、(7)及(8)，可以得到售前成本的函數如下：

$$\begin{aligned} PC &= c_m + \frac{k}{pt} + \frac{v}{pt} + \frac{(p-d)ht}{2d} + \frac{r(1 - e^{-\lambda t})}{pt} \\ &\quad + s \left[\theta_2 + (\theta_1 - \theta_2) \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

(二)單位時間每個產品售後成本(post-sale cost)－免費維修保證成本(free-repair warranty cost)

根據(6)，計算生產週期內不良品的比例，得到

$$q(t) = \frac{E(N)}{pt} = \theta_2 + (\theta_1 - \theta_2) \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \quad (10)$$

假設產品的壽命服從韋伯分配，售後的產品在保證期間 w 內，原屬良品的失效率為 $h_1(\tau)$ ，重製後產品的失效率為 $h_2(\tau)$ ，期望失效次數分別為和

計算產品保證期間可能失效的機率為

$$[1 - q(t)] \int_0^w h_1(\tau) d\tau + q(t) \int_0^w h_2(\tau) d\tau \quad (11)$$

因此，售後成本為

$$WC = c_r \left\{ [1 - q(t)] \int_0^w h_1(\tau) d\tau + q(t) \int_0^w h_2(\tau) d\tau \right\} \quad (12)$$

綜合(9)和(12)，可以得到單位總成本的目標函數如下：

$$\begin{aligned}
 C(t) &= PC + WC \\
 &= c_m + \frac{k}{pt} + \frac{v}{pt} + \frac{(p-d)ht}{2d} + \frac{r(1-e^{-\lambda t})}{pt} \\
 &\quad + s \left[\theta_2 + (\theta_1 - \theta_2) \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right] \\
 &\quad + c_r \left\{ [1-q(t)] \int_0^w h_1(\tau) d\tau + q(t) \int_0^w h_2(\tau) d\tau \right\}
 \end{aligned} \quad (13)$$

觀察單位總成本的目標函數，可以發現當假設 v 和 s 均為 0，也就是當不考慮檢測保養成本和重製成本時，(13)式會等於 Yeh et al. (2000) 文獻中的(5)式。另外，當假設 c_m 、 v 和 w 均為 0，也就是不考慮製造成本、檢測保養成本和保證成本時，則(12)式會等於 Lin and Hou (2005) 文獻中的(3)式，由此可知，本論文是延伸 Yeh et al. (2000) 以及 Lin and Hou (2005) 的研究。

肆、模式求解和數值驗證

一、模式求解

本章節主要進行模式的推導，目的在於使單位總成本目標函數最小的情況下，尋找一個唯一的最佳生產期間。我們主要以微積分方法來進行模式的推導，並運用 Yeh et al. (2000) 的研究來支持本研究的模式。

(一)最佳解：首先將單位總成本的目標函數(13)式對生產期間 t 作一階微分

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{1}{t^2} \left[\frac{-(k+v)}{p} + \frac{h(p-d)t^2}{2d} + \beta(\lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} - 1) \right] \quad (14)$$

其中

$$\beta = \frac{r}{p} - \frac{\left[s + c_r \left(\int_0^w h_2(\tau) d\tau - \int_0^w h_1(\tau) d\tau \right) \right]}{\lambda} (\theta_2 - \theta_1) \quad (15)$$

令

$$f(t) = t^2 \frac{dC(t)}{dt} \quad (16)$$

則

$$f(t) = \frac{-(k+v)}{p} + \frac{h(p-d)t^2}{2d} + \beta(\lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} - 1) \quad (17)$$

令 $f(t)=0$ ，可以求得最佳的生產期間

$$t^* = \sqrt{\frac{2d[(k+v) - p\beta(\lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} - 1)]}{p(p-d)h}} \quad (18)$$

(二)近似解：參考 Yeh et al. [18] 考慮當轉換率 λ 極小時，則可以將近似值代入(13)式

$$e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t + (\lambda t)^2 / 2! \quad (19)$$

則

$$f(t) = \frac{-(k+v)}{p} + \frac{h(p-d)t^2}{2d} - \frac{\beta \lambda^2 t^2}{2} \quad (20)$$

可以求得最佳生產期間的近似解

$$\tilde{t}^* = \sqrt{\frac{2d(k+v)}{p[(p-d)h - \beta \lambda^2 d]}} \quad (21)$$

(三)特例：

1. 假設當 $\lambda=0$ 時，表示生產系統總是維持在控制狀態，此時

$$f(t) = \frac{-(k+v)}{p} + \frac{h(p-d)t^2}{2d} \quad (22)$$

可以得到傳統 EMQ 模型的最佳生產期間

$$t_1 = \sqrt{2(k+v)d/p(p-d)h} \quad (23)$$

2. 假設當 $\lambda=\infty$ 時，表示生產系統總是維持在失控狀態，此時

$$f(t) = \frac{-(k+v)}{p} + \frac{h(p-d)t^2}{2d} - \frac{r}{p} \quad (24)$$

可以得到

$$t_2 = \sqrt{2(k+v+r)d/p(p-d)h} \quad (25)$$

接下來，我們可以運用(一)、(二)、(三)證明 Theorem 1 和 2。

Theorem 1. 最佳生產期間 t^* 存在而且是唯一的。

Proof. 首先，因為 $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -(k+v)/p < 0$ 而且 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty > 0$ ，所以 $f(t)$ 是一個連續函數。

將 $f(t)$ 一階微分後，可以得到

$$f'(t) = t \left[\frac{(p-d)h}{d} - \beta \lambda^2 e^{-\lambda t} \right] \quad (26)$$

(a) 若 $\beta \leq 0$ ，則 $t > 0$ ， $f'(t) > 0$ 。 $f(t)$ 是一個遞增的函數，當 $f(t) = 0$ 時，可以得到一個唯一的最佳生產期間 t^* 。

(b) 若 $\beta > 0$ ，則當 $t \leq \{\ln[\beta \lambda^2 d / (p-d)h]\} / \lambda$ 時， $f'(t) \leq 0$ 。當 $t > \{\ln[\beta \lambda^2 d / (p-d)h]\} / \lambda$ 時， $f'(t) > 0$ 。這表示 $f(t)$ 先從遞減轉為遞增，所以，當 $f(t) = 0$ 時，也可以得到一個唯一的最佳生產期間 t^* 。

因此，證明 Theorem 1 是成立的。

在知道 t^* 存在且是唯一的最佳解後，接下來將要利用(21)式與(23)式來找到最佳生產期間的範圍。

Theorem 2.

(a) 若 $\beta < 0$ ，則 $\tilde{t}^* < t^* < t_1$ 。因為在 Theorem 1 時，已經知道 $t > 0$ ， $f(t)$ 是一個遞增的函數， $f(\tilde{t}^*) < 0$ ， $f(t^*) = 0$ ， $f(t_1) > 0$ ，因此 $\tilde{t}^* < t^* < t_1$ 。

(b) 若 $\beta = 0$ ，則 $t_1 = t^* = \tilde{t}^*$ 。

(c) 若 $\beta > 0$ ，則 $t_1 < t^* < \tilde{t}^*$ 。因為 $f(t_1) < 0$ ， $f(t^*) = 0$ ，而 $f(\tilde{t}^*) > 0$ ，因此 $f(\tilde{t}^*) > f(t^*) > f(t_1)$ 。

綜合以上 Theorem 1 和 2，可以推導出下面的演算過程：

(一) 首先，計算 β 、 t_1 和 $\tilde{t}^*$ 。

(二) 若 $\beta > 0$ ，則令 $t_L = t_1$ ， $t_U = \tilde{t}^*$ 。

若 $\beta < 0$ ，則令 $t_L = \tilde{t}^*$ ， $t_U = t_1$ 。

(三) 令 $t = (t_L + t_U) / 2$ 。

(四) 將 t 值代入 $f(t)$ ，

若 $f(t) = 0$ ，則 $t = t^*$ 。

若 $f(t) > 0$ ，則 $t_U = t$ ，並回到步驟(三)。

若 $f(t) < 0$ ，則 $t_L = t$ ，並回到步驟(三)。

(五) 得到 t^* ，然後計算 $C(t^*)$ 。

二、數值驗證

參數主要是沿用 Yeh et al. [18] 文獻中數值分析的數據，並再合理假設本研究所欠缺的參數值—檢測保養成本 v 、重製成本 s ，以完成數值分析中所有的參數設定。例子假設某產品其年生產率 600 單位、年需求率 400 單位、單位產品的製造成本 \$10、設置成本 \$100、檢測保養成本 \$50、單位時間每單位產品的存貨持有成本 \$0.1、單位產品的重製成本 \$0.5、生產系統的復原成本 \$200、控制狀態的產品不良率 0.15、失控狀態的產品不良率 0.65、生產系統由控制狀態轉換為失控狀態的轉換率 0.1、單位產品維修成本 \$0.1、保證期限分別為 0 到 18 年，產品的失效率服從韋伯分配，原屬良品的失效率為

$h_1(\tau) = \lambda_1^{\beta_1} \beta_1 \tau^{\beta_1-1}$ 、期望失效時間為 $36 \Gamma(3/2)$ ，重製後產品的失效率為

$h_2(\tau) = \lambda_2^{\beta_2} \beta_2 \tau^{\beta_2-1}$ ，期望失效時間為 $12 \Gamma(3/2)$ 。

參數假設如下：

p : 600(年)	d : 400(年)
cm : \$ 10	k : \$ 100
v : \$ 50	h : \$ 0.1
s : \$ 0.5	r : \$ 200
$\theta 1$: 0.15	$\theta 2$: 0.65
cr : \$ 0.1	λ : 0.1
$\lambda 1$: 1/36	$\lambda 2$: 1/12
$\beta 1$: 2	$\beta 2$: 2

將上述各數值代入後，得到的結果如表 4-1，可以發現 β 值均為負值，最佳生產期間 t^* 總是存在的，而且介於傳統

EMQ 模型的最佳生產期間 t_1 以及近似解 $\tilde{t}^*$ 之間，這證明了本研究的 Theorem 1 和 2。雖然， t^* 總是大於 $\tilde{t}^*$ ，所得到的單位總成本卻都僅有極小的差距，也就是說，確實可以利用來近似單位總成本的最佳解。

隨著保證期限的不斷增加，最佳的生

產期間明顯縮短，而單位總成本則明顯增加。保證期限增加，代表保證成本增加。為了減少產品在保證期限內的失效率，必須縮短生產期間，以減少不良品的數量，進而降低重製成本與保證成本。因此，當保證期限增加，最佳生產期間將會縮短，單位總成本則會增加。

表 4-1 不同保證期限對於最佳生產期間與單位總成本的影響

w	0	3	6	9	12	15	18
t^*	2.70917	2.70445	2.69042	2.66747	2.63623	2.59749	2.5522
$C(t^*)$	10.29521	10.29708	10.3027	10.31204	10.3251	10.34185	10.36227
	2.64135	2.63625	2.62111	2.59645	2.56307	2.52199	2.47436
$C(\tilde{t}^*)$	10.29527	10.29714	10.30276	10.31211	10.32517	10.34193	10.36237
t_1	3.16228	3.16228	3.16228	3.16228	3.16228	3.16228	3.16228
$C(t_1)$	10.29736	10.29929	10.30506	10.31468	10.32815	10.34547	10.36663
t_2	4.83046	4.83046	4.83046	4.83046	4.83046	4.83046	4.83046
$C(t_2)$	10.32568	10.32778	10.33409	10.3446	10.35932	10.37824	10.40137

圖 4-1 說明轉換率與最佳生產期間的關係，當轉換率趨近於 0，最佳生產期間 t^* 會趨近傳統 EMQ 模型的最佳生產期間 t_1 ，當轉換率趨近於 ∞ ，最佳生產期間 t^*

會趨近總是在失控狀態的最佳生產期間 t_2 。當轉換率從 0 開始逐漸增加， t^* 會從 t_1 開始逐漸縮短，然後又逐漸增加趨近 t_2 。

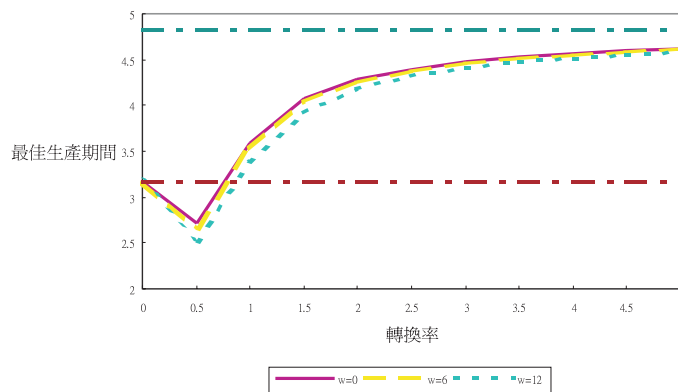


圖 4-1 轉換率與最佳生產期間關係趨勢圖

圖 4-2 說明轉換率與單位總成本的關係，轉換率增加，會造成單位總成本的增加。由於轉換率增加，使得生產系統常常

處於失控狀態，系統必須不斷的修復成控制狀態，增加了系統的復原成本。因此，當轉換率增加，單位總成本也增加。

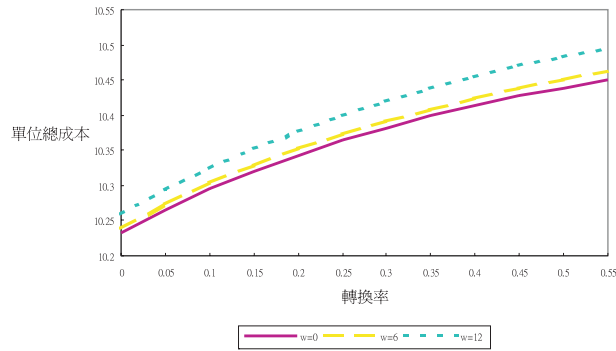


圖 4-2 轉換率與單位總成本關係趨勢圖

三、本模式與 Yeh et al. 模式比較

本節將比較不良品重製模式與 Yeh et al. (2000) 模式，找出兩者在模式和實際數值分析結果不同的地方。

(一) 模式部分：

由表 4-2 可以知道，由於本模式是延伸 Yeh et al. (2000) 的研究，因此，最主

要的不同即是單位總成本與最佳生產期間均加上檢測保養成本及重製成本的計算。而在最佳生產期間的求解方面，Yeh et al. 是以演算程序來求得最佳生產期間，本模式除了導出最佳生產期間外，演算程序的說明也較簡單明確。另外，本模式也縮小了最佳生產期間的範圍。

表 4-2 不良品重製模式與 Yeh et al. 模式比較

	單位總成本	最佳生產期間的範圍
本 模 式	$C(t) = c_m + \frac{k}{pt} + \frac{v}{pt} + \frac{(p-d)ht}{2d} + \frac{r(1-e^{-\lambda t})}{pt}$ $+ s \left[\theta_2 + (\theta_1 - \theta_2) \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right]$ $+ c_r \left\{ [1-q(t)] \int_0^w h_1(\tau) d\tau + q(t) \int_0^w h_2(\tau) d\tau \right\}$	1. $\beta < 0$, $t_1 < t^* < t_2$。 2. $\beta = 0$, $t_1 = t^* = t_2$。 3. $\beta > 0$, $t_1 < t^* < t_2$。
Yeh et al. (2000)	$C(t) = c_m + \frac{k}{pt} + \frac{(p-d)ht}{2d} + \frac{r(1-e^{-\lambda t})}{pt}$ $+ c_r \left\{ [1-q(t)] \int_0^w h_1(\tau) d\tau + q(t) \int_0^w h_2(\tau) d\tau \right\}$	1. $A \leq 0$, $0 < t^* \leq t_1$。 2. $A > 0$, $t_1 \leq t^* < t_3$。

(二) 數值分析部份：

表 4-3 為不良品重製模式與 Yeh et al. (2000) 模式的數值分析比較，Yeh et al. 發現在轉換率 $\lambda = 0.1$ 的情況下，單位總成本的近似解 $C(\tilde{t}^*)$ 非常近似最佳解 $C(t^*)$ ；而在保證期限 $w \geq 12$ 時，因為 $A \leq 0$ ，最佳生產期間 $t^* \leq t_1$ 。因此，使得 Yeh et al. 文獻中的 Theorem 2 (若 $A \leq 0$ ，則 $0 < t^* \leq t_1$) 得到驗證。

本研究的不良品重製模式加入檢測保養成本及重製成本之後，發現雖然單位總

成本的近似解 $C(\tilde{t}^*)$ 會近似最佳解 $C(t^*)$ ，但在小數點後第五位數就開始有差距，近似解 $C(\tilde{t}^*)$ 總是會大於最佳解 $C(t^*)$ ，兩者之間的差距會隨著保證期限增加而逐漸拉大，這也驗證了最佳解是唯一的。

另外，由於本模式加入檢測保養成本，製造商為減少成本的支出，將會延長生產期間，而不良品會衍生重製成本，即使重製之後，較高的產品失效率又會增加保證成本。因此，最佳生產期間都比 Yeh et al. 的最佳生產期間較長，兩者之間的差

距也隨著保證期限增加而逐漸拉大，這種情形也反映在單位總成本上。不管保證期限如何變動， $\beta < 0$ ，因此，最佳生產期

間 $\tilde{t}^* < t^* < t_1$ ，這也驗證了不良品重製模式的 Theorem 2 最佳生產期間的範圍(若 $\beta < 0$ ， $\tilde{t}^* < t^* < t_1$)。

表 4-3 不良品重製模式與 Yeh et al. 模式數值分析比較

	w	0	6	12	18
本模式	t^*	2.70917	2.69042	2.63623	2.5522
	$C(t^*)$	10.29521	10.3027	10.3251	10.36227
	$\tilde{t}^*$	2.64135	2.62111	2.56307	2.47436
	$C(\tilde{t}^*)$	10.29527	10.30276	10.32517	10.36237
	t_1	3.16228	3.16228	3.16228	3.16228
	$C(t_1)$	10.29736	10.30506	10.32815	10.36663
Yeh et al. (2000)	t^*	2.657	2.631	2.558	2.446
	$C(t^*)$	10.158	10.165	10.188	10.225
	$\tilde{t}^*$	2.672	2.641	2.553	2.425
	$C(\tilde{t}^*)$	10.158	10.167	10.188	10.225
	t_1	2.581	2.581	2.581	2.581
	$C(t_1)$	10.129	10.135	10.153	10.184

伍、結論與建議

本研究是在不完美生產系統下，建立一個結合重製與保證成本的成本模型，再以數值範例實際進行驗證，求得最佳之單位總成本。經過前面的說明、模式推導和數值驗證，並將本模式和 Yeh et al. (2000) 模式比較後，發現在單位總成本最小化的目標函數下，生產期間 t^* 有唯一的最佳解，並推導出最佳生產期間的範圍，總是介於傳統 EMQ 模型的最佳生產期間 t_1 以及近似解 之間。

經過數值實際驗證及分析，發現轉換率和重製成本，對單位總成本都有顯著影響。若可以有效降低轉換率以及重製成本，將有利於製造商降低單位總成本；另外，保證期限對復原成本和維修成本有明顯的強化作用，也就是當保證期限越長，復原成本或維修成本越高時，則單位總成本就會越高。由此可見重製和保證成本的

重要性，希望本研究能夠提供國軍生產製造中心與民間製造商在工作實務上擬定生產期間的一個決策參考。

由於生產系統的問題十分複雜，本文仍多有欠缺，以下列舉幾項建議提供未來研究之參考：

- 一、實際之生產系統可能生產出製成品、不良品與廢品，而不良品經過重製之後，也可能成為製成品或廢品。
- 二、考慮缺貨成本或數量折扣產生之影響。
- 三、保證策略並不僅限於免費維修保證，可以考慮比例負擔保證或其他的保證策略。

參考文獻

- Chen, C.K. and Lo, C.C., 2006. Optimal production run length for products sold with warranty in an imperfect production system with allowable shortages.

- Mathematical and Computer Modelling*, 44, 319-331.
- Chun, Y.H., 1992. Optimal number of periodic preventive maintenance operations under warranty. *Reliability Engineering and System Safety*, 37, 223-225.
- Chung, K.J. and Hou, K.L., 2003. An optimal production run time with imperfect production process and allowable shortages. *Computers and Operations Research*, 30, 483-490.
- Djamaludin, I., Wilson, R.J. and Murthy, D. N.P., 1995. Lot Sizing and Testing for Items with Uncertain Quality. *Mathematical and Computer Modelling*, 22, 35-44.
- Glickman, T.S. and Berger, P.D., 1976. Optimal price and protection period decisions for a product under warranty. *Management Science*, 22, 1381-1390.
- Hong, J.D., 1997. Optimal production cycles, procurement schedules, and joint investment in an imperfect production system. *European Journal of Operational Research*, 100, 413-428.
- Lam, Y. and Lam, P.K.W., 2001. An extended warranty policy with options open to consumers. *European Journal of Operational Research*, 131, 514-529.
- Lee, H.L., 1992. Lot sizing to reduce capacity utilization in a production process with defective items, process corrections, and rework. *Management Science*, 38, 1314-1328.
- Lee, J.S. and Park, K.S., 1991. Joint determination of production cycle and inspection intervals in a deteriorating production. *Journal of the Operational Research Society*, 42, 775-783.
- Lee, H.L. and Rosenblatt, M.J., 1987. Simultaneous determination of production cycle and inspection schedules in a production system. *Management Science*, 33, 1125-1136.
- Lin, C.S., Chen, C.H. and Kroll, D.E., 2003. Integrated production- inventory models for imperfect production processes under inspection schedules. *Computers and Industrial Engineering*, 44, 633-650.
- Lin, L.C. and Hou, K.L., 2005. EMQ Model with Maintenance Actions for Deteriorating Production System. *Information and Management Sciences*, 16, 53-65.
- Nguyen, D.G. and Murthy, D.N.P., 1984. A general model for Estimating warranty costs for repairable products. *IIE Transactions*, 16, 379-386.
- Ougang, L.Y. and Chang, H.C., 2000. EMQ model with variable lead time and Imperfect production process. *International Journal of Information and Management Sciences*, 11, 1-10.
- Porteus, E.L., 1986. Optimal lot sizing, process quality improvement, and setup cost reduction. *Operations Research*, 34, 137-144.
- Schwaller, R.L., 1988. EOQ under inspection costs. *Production and Inventory Management*, 29, 22-24.
- Wang, C. H., 2004. The impact of a free-repair warranty policy on EMQ model for imperfect production systems. *Computers and Operations Research*, 31, 2021-2035.
- Yeh, R.H., Ho, W.T. and Tseng, S.T., 2000. Optimal production run length for products sold with warranty. *European Journal of Operational Research*, 120, 575-582.