

以 POD 分析渦流模擬平面噴流之流場結構

Proper Orthogonal Decomposition on the Flow Structures of Plane Jet Simulated by Vortex Method

許掙強

Cheng-Chiang Hsu

國立空軍航空技術學院飛機工程系

Department of Aircraft Engineering, Air Force Institute of Technology, Taiwan

摘要

點渦流模式被採用來建立平面噴流之紊態流場，為使模擬產生之數據更符合三維紊流場特性，基於混合長度(mixing length)概念的 Lagrangian 形態之紊流模式被引入流場模擬計算。模擬所獲得的流場視察圖像，可觀察到渦層捲起、同號環流渦結構配對、合併等渦結構成長過程、及異號環流渦結構於勢流區後面的偏擺等現象。模擬結果顯示勢流區後中心位置流向速度的頻譜於對數尺度下，可觀察得斜率呈 $-5/3$ 之線性慣性子區，這顯示本文模擬所得的流場數據符合三維紊流場的紊流場統計特性。另外，流場特徵量在勢流區後亦呈現相似分佈的特性。將下游特徵量具相似分佈位置，取截面數據進行 POD (proper orthogonal decomposition) 分析，可得截面數據位置數二倍的模態，依所含能量由高至低將模態排序，顯示前面能量最高 10 個模態即包含紊流場擾動動能 90% 以上，發現將模態能量由高至低的時變振幅做頻譜分析，前面高能量振幅頻譜具二維紊流特性(具擬渦能(enstrophy)慣性子區)，能量稍微低一點的振幅頻譜具三維紊流場特性(具紊流能量的慣性子區)，而能量很低的部份則呈現白噪音形態。

關鍵詞：點渦流模式、平面噴流、Lagrangian 紊流模式、POD、慣性子區。

ABSTRACT

Point vortex technique was adopted to simulate the turbulent flow field of plane jet. For obtaining three dimensional turbulence, a Lagrangian turbulence model, which is based on the concept of mixing length, was introduced in the present simulations. Reasonable visualizations, which illustrating vortex sheet rolling-up, pairing, merging and tearing among vortices with the same sign of circulation, flapping motion of vortices with the opposite sign of circulation, were presented in this study. The energy spectrum of longitudinal fluctuation velocity at center line after the potential core illustrated three dimensional turbulence initial subrange which is with slope $-5/3$ under log scale. Moreover, lateral similar distributions of turbulence characteristics were earned after end potential core. Proper orthogonal decomposition (POD) was used to analyze the time series of fluctuating velocities of a cross section behind the end of potential core. Total 4000 modes was caught, and the first ten modes with higher energies occupy 90% total energy. In means that proper orthogonal decomposition could efficiently reduce the order of turbulent flow field. Especially, spectrums of histories of amplitudes at different modes depicted that two dimensional turbulence properties appearing at modes with higher energy, three dimensional turbulent properties addressing at modes of middle energy, and white noise being observed at modes with little energy.

Keywords: Point Vortex Model, Plane Jet, Lagrangian Turbulent Model, Proper Orthogonal Decomposition, Initial subrange

一、前言

生命的維繫幾乎離不開自然界紊流的存在，長久以來紊流一直是工程與科學界研究的熱點，也是人類迄今一直無法完全掌控的課題。流場中剪切率的存在，是紊流動能產生與維持的基本要件，因此剪切效應與紊流動能發展的交互作用，長期受到研究者的青睞。在紊流研究上，依流場發展過程壁面的存在與否，研究課題被分為壁面剪切流與自由剪切流等兩類[1-3]。常見的自由剪切流有混合層流、噴流、與尾流等，其中平面噴流由於幾何形狀簡單及工程上的應用價值，長久以來就吸引，眾多研究的投入[4-5]。

由於紊流流場所包含的尺度幾乎到無窮多，且具有隨機性，因此在研究上往往需借重統計方式處理，才得以獲得明確的結論。由於人們於紊流場中發現相干渦流(coherent vortex structure)的存在，且相干渦流的存在與演進似乎受到確定性機構的主導，因此紊流流場非全然是隨機機構所主導。經過學者多年的研究，紊流理解雖獲得極大的進展，但距離完全掌控與理解紊流場，仍有一大段的路要走[6-7]。

相干渦流結構在紊流場中往往占據全部紊流能量的大部分，因此能充分了解其運作機制，非但有助於紊流的理解，更能促進紊流控制手段的建立。但相干渦流結構往往隱含於紊流場中，如何在無窮維度的紊流場中，分離出其訊息，一直是學者努力的目標。常用的方式有流場視察與條件取樣(conditional sampling)，但這兩種方式卻有先天的限制，在流場視察技術一般只能用於低雷諾數且混沌現象不明顯的流場。而在使用條件取樣技術研究相干渦結構，卻需要明確的參考訊號才有辦法進行數據的處理[8-10]。

合適正交分解(proper orthogonal dec

omposition，下文以POD簡稱)，為一種常用於紊流場相干渦流結構訊息提取的數據處理方法。POD以流場擾動量所獲得二階統計張量進行分析，進而獲得一組流場描述的最佳正交歸一基底，其特色為可藉基底中少數幾個基底向量擾動場中含絕大多數能量的訊號分離出來，因此能將流場中相干渦流結構的訊號分解出來[11]。在實際流場分析上，可有效降低流場維度，大幅度提升分析效率[12-13]。

POD在紊流場的分析應用，最早是由Lumley[14-15]提出，並應用於紊流場將相干渦流結構訊息由獲得的訊息中提出。由於POD方法需要大量不同點相關二階張量之統計值，所以每處理一次空間點數與取樣次數都要很多，因此在早期，僅有少數研究使用它來分解紊流場的訊息[16-17]。近年來由於量測技術與電腦運算能力的大幅度提升，使得POD數據分析技巧被大量應用於紊流場研究，尤其是用於相干渦流結構相關訊息的分解與分析[18-19]。應用POD於噴流渦流結構特性研究上的有：Shim等[20]應用PIV所獲得的流場訊號，藉POD方式提取出紊流場中與渦流結構相關的訊息；Gordeyev 和Thomas[21]以X型熱線量測速度進行POD分析，發現以POD所得之特徵函數與流向位置、頻率及展向波數(spanwise wavenumber)有關，且當給予適度的尺度調整，可於不同流向位置得到相似分佈的特徵值與特徵函數；Terashima等[22]用POD分析量測所得的速度與壓力訊號，提取平面噴流於相似區之相干渦流結構，並探討與渦流結構相關的能量傳遞；Pastrana等[23]等利用POD分解出雙噴流在側風作用下流場訊號的相關成份與隨機成份。

在紊流模擬領域，渦流法常被用來模擬自由剪切流的發展與特性，例如：Inoue[24]在其混合層流模擬中，發現在無外在激擾作

用下，當適當地擇取數值參數，不同的流向位置的紊流統計量具有相似分佈；Inoue[25]在雙頻激擾之混合層流的空間發展模擬，發現渦流結構的交互作用符合Ho[26]所提出的渦流演進模式；Hsu[27]在其平面噴流模擬中，發現平面噴流次頻壓抑現象[28]，可由基頻與長波非對稱激擾之非線性交互作用產生；Hsu更發現在高強度橫向激擾下的混合層流模擬，經適當無因次化處理，可得出與實驗相合的定量結果[29]。

透過數值模擬產生的紊流場訊息與真實紊流場訊息，其相似程度與相異點，一直是紊流模擬從事人員探討與研究的課題。本文將以平面噴流點渦流模式為基礎，加入滿足平面噴流混合長度特性的紊流模式，促使模擬之平面噴流流場能在很上游就能獲得統計特徵量相似分佈的結果，並將相似區域某流向位置的流向與橫向速度橫向分佈訊息，進行POD分解，藉由POD分解與重構所獲得的訊息，了解點渦流模式所獲得紊流場訊息的特性。

二、數值模式與訊號處理

2.1 平面噴流渦流模式

2.1.1 渦流效應處理

在點渦流模擬中，將局部有旋區中的渦量分佈用離散點渦元(vortex element)來近似。假設在時刻 t ，流場之渦量場由 N_v 個離散點渦元 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{N_v}$ 來近似，其位置向量分別為

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2) \cdots \vec{r}_{N_v} = (x_{N_v}, y_{N_v}),$$

可得空間中任一位置 $\vec{r} = (x, y)$ ，因渦流場存在所獲得的速度分量 (u_v, v_v) ，

$$u_v = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_v} \frac{(-y + y_j)\Gamma_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^2 + \sigma^2} \quad (1)$$

$$v_v = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_v} \frac{(x - x_j)\Gamma_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^2 + \sigma^2} \quad (2)$$

其中 σ 為人工平滑係數[20-31]，在本文相關計算取 $\sigma = 0.6U_j\Delta t$ ，一般 σ 之值要大於點渦流之對流效應位移， Δt 及 U_j 分別為計算時間間隔與平面噴流之噴出速度。

2.1.2 邊界處理與點渦流曳放

在實驗上，平面噴流之噴口形狀為一個高展弦比(D/w , D 為噴口高度， w 為展向長度)之矩形，將具有流向速度 U_j 之流體向周圍靜止流體噴出，在離噴口不遠的區域，由於展向流場變化很小，因此可將流場視為二維的流場。

在不可壓縮流的前提下，平面噴流流場主要由三個部份所構成：

1. 噴流內部管壁邊界層在噴口出口邊緣分離所釋出的自由渦，自由渦釋出在流場中，依所在位置之速度自由移動。在計算上，於每個計算時間間隔 Δt ，在噴口上下二個邊緣分別釋出一個自由點渦流，強度為

$$\Gamma = \pm \frac{1}{2} U_j \Delta t \quad (3)$$

- 其中 $\pm$ 符號表示噴流出口上下緣視出之自由點渦流，具有相異的旋轉方向。
2. 由噴口兩側延伸出去的固體壁面效應。
3. 噴流口為一個具均勻速度分佈的流體源體(source)。

在數值處理上，將噴口源流與從上下噴口邊緣延伸出去的固體壁面，以無黏小板法(panel method)近似處理，小板取為源流型式(source panel)，小板強度於每一時刻強制要求固體壁面滿足不穿透條件，即

$$\vec{V}_w \cdot \vec{n} = 0 \quad (4)$$

其中 $\vec{V}_w$ 為壁面小板控制點處之速度， $\vec{n}$ 為小板之單位法向量。小板在噴流噴口處之控制點，要求噴出之法向速度為 V_j ，故每一控制點滿足

$$\vec{V}_e \cdot \vec{n} = V_j \quad (5)$$

其中 $\vec{V}_e$ 為噴口小板控制點處之速度。

每一計算時刻，由(4)、(5)關係可建立一組以小板流強度為未知數之線性聯立方程組，求解得當時時刻滿足邊界條件小板源流之強度。

在本文計算模擬中，座標原點取在噴口中間處，噴口寬度 $D=1$ ，噴流出口速度 $V_j=1$ ，固體壁面由噴口邊緣上下個延伸 $20D$ 。另外，為避免長時間取樣，計算點渦流過多，造成計算時間過長，限定點渦流存在流場之計算步數為2000步，即自由點渦流在流場存在時間超過 $2000 \Delta t$ 就會消失，這種處理方式，可保證任一計算時刻，流場總環通量保持為零。因此，當統計穩定達到開始取樣時，流場自由渦流個數維持恆定的4000個。

2.1.3 紊流模式

一般平面噴流的流向發展，須經過三個階段：(1)勢流核區(potential core)，此區域

不同流向位置之中心速度維持與噴口噴出速度 V_j 相同，此時流場發展主要受Kelvin-Helmholtz不穩定機制所主導，可將流場視為兩個具相反渦量強度自由剪層流，進行同號渦結構的發展，包含渦流捲起、配對與合併等。(2)異號渦結構交互作用區，在勢流核區之後，上下兩側異號渦結構相互碰撞，形成劇烈的交互作用，渦結構的運動具有高度的不可預測性，噴流偏擺(flapping)為此區域的一個特色現象。(3)相似區，在這個區域噴平均流速度、擾動速度之均方根與二階張量統計均達到橫向相似分佈，即以適當尺度對速度及橫向座標進行無因次化，可將不同流向位置相關統計量之橫向分佈以單一曲線表示。

在實際流場要達到統計量的相似分佈，往往距噴口下游 $30D$ 以上，方有機會達成，因此在渦流模擬上要達到相似區的出現，將需要極大量的點渦流於計算區域中，為了促使模擬結果能於距上由比較近的流向位置出現統計相似分佈，本研究特別提出一個紊流模式加諸於點渦流模擬，這個渦流模式採用Prandtl混合長度的假設，在模擬流場中加入虛擬運動黏度(virtual kinematic viscosity)

$$\nu_t = k(x - x_o)^{\frac{1}{2}}$$

其中 k 為常數， x_o 為噴流虛擬原點，此種 ν_t 形態符合混合長度(mixing length)的假設。

在點渦流模擬中，分子擴散效性常用隨機走步(random walk)方式近似，本文模擬紊流結構所增益之擴散效應，借用隨機走步的方式加以實施，不同的是分子擴散效應之運動黏滯係數(ν_m)為常數，而本研究之紊流擴散效應之運動黏滯係數(ν_t)則隨流向位置的不同而有所差異。

數值處理上，於 Δt 時間間隔，自由點渦流除了受到對流效應產生的位移外，再多加一個因紊流擴散效應產生的隨機位移，其形式如下：

$$\Delta x_{i_r} = \left\{ 4\nu_t \Delta t \ln\left(\frac{1}{p_i}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \cos \theta_i$$

$$\Delta y_{i_r} = \left\{ 4\nu_t \Delta t \ln\left(\frac{1}{p_i}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \sin \theta_i$$

其中， p_i 和 θ_i 分別為均勻分佈於區間 $(0, 1)$ 和 $(0, 2\pi)$ 所得之隨機數值，上面所得之 Δx_{i_r} 、

Δy_{i_r} 滿足互為統計獨立，平均值為 0，標準差為 $2\nu_t \Delta t$ 之常態分佈。

2.1.4 點渦流軌跡之推求

若 x_i^n 、 x_i^{n+1} 、 y_i^n 、 y_i^{n+1} 分別表示點渦流 i

在時間 $n\Delta t$ 及 $(n+1)\Delta t$ 之 x 及 y 座標，當在時間 $(n+1)\Delta t$ 時，求得自由渦流 i 之流向速度及橫向速度 u_i 、 v_i (速度為自由渦效應與小板效應之和)，藉二階 Runge-Kuta 方式可得對流位移 $\Delta x_{i-convection}$ 、 $\Delta y_{i-convection}$ ，最後可得自由渦在時間 $(n+1)\Delta t$ 之位置

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta x_{i-convection} + \Delta x_{i_r}$$

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \Delta y_{i-convection} + \Delta y_{i_r}$$

2.2 POD 基底求法簡述

首先在流場不同空間位置，取得 m 個訊息，其隨機變量分別為 x_1 、 $x_2 \cdots x_m$ ，分別於時間

$t_i = i\Delta t$ ， $i=1 \cdots n$ ，取樣 n 次，以 $x_i^{(j)}$ 表隨機變量

x_i 在 $t_j = j\Delta t$ 之取樣值。接著建構資料矩陣

$$A = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_m^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_m^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_m^{(n)} \end{bmatrix}$$

得協方差相關矩陣(covariance matrix)

$$C_x = \frac{1}{n} A^T A = \begin{bmatrix} C_{x11} & C_{x12} & \cdots & C_{x1m} \\ C_{x21} & C_{x22} & \cdots & C_{x2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{xm1} & C_{xm2} & \cdots & C_{xmm} \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } c_{xij} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} x_i^{(1)} & x_i^{(2)} & \cdots & x_i^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j^{(1)} \\ x_j^{(2)} \\ \vdots \\ x_j^{(n)} \end{bmatrix}$$

又 C_x 為一個實對稱矩陣，存在正交矩陣 P 使

$$P^T C_x P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m1} & \phi_{m2} & \cdots & \phi_{mm} \end{bmatrix} = [\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \cdots, \phi^{(m)}]$$

行向量 $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(m)}$ 即是以 POD 方法由流場訊息，所獲得的一組 m 維空間正交規一化基底，滿足

$$\langle \phi^{(i)}, \phi^{(j)} \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

又若資料矩陣 A 為流場不同位置之擾動速

度，則 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，可視為基底 $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(m)}$ 相對應之動能，在實際紊流場應用上，發現少數前面幾個基底的擾動速度動量，即佔有流場的大部分能量，因此在數據分析上可有效降低流場分析維度，各可將紊流場中大型渦結構(coherent vortex structure)訊息由流場訊息中分離出來，對探討大型渦結構的特性有極大的助益。

三、結果與討論

本文主要探討兩個課題：

1. 平面噴流點渦流模式加入紊流模式，對模擬結果之影響。
2. 平面噴流點渦模式加入紊流模式，所得相似區域速度橫向分佈，以POD方式分解，探討不同模態之特性。

3.1 平面噴流流場特性視察

圖 1 為模擬所得之瞬時煙線軌跡圖。此圖為於噴流出口處選取 20 個點釋放釋放隨流體運動之標記點所得，由圖可看出平面噴流渦結構之發展。在噴流出口兩側，混合層流在 Kelvin-Helmholtz 不穩定 機構作用下，逐漸捲以成大型渦結構，隨著往下游發展相鄰同號渦結構，彼此間進行非線性交互作用，以配對與合併方式增大渦流結構，因此渦流結構會隨著往下游發展逐漸變大，當渦流增大至約與噴流口寬度同尺度，噴流兩側之異號渦結構開始進行更激烈的交互作用，此異號渦結構間的交互作用，引發噴流向上與向下的偏擺作用。但從圖來看，噴擺後渦結構亦逐漸增大，但其增大是導源與同號渦結構之間的合併與吞併。

圖 2 為點渦流在與圖 1 相同時間所獲得的瞬時分佈圖，配合圖 1 可看出點渦流集合而成的相干結構在噴流兩側，會隨著往下游

的進展逐漸增大，且越往下游發展，噴流兩側渦結構之相位差就越明顯，異號間渦結構的交互作用更會造成噴流劇烈的偏擺運動，而這些劇烈的偏擺運動，更大幅提升了噴流的橫向擴展。

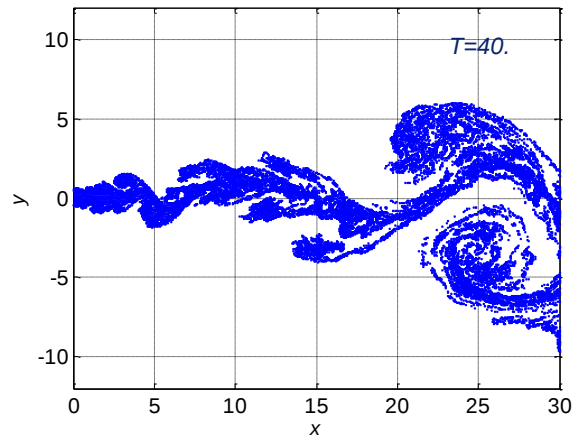


圖 1: 瞬時煙線圖。

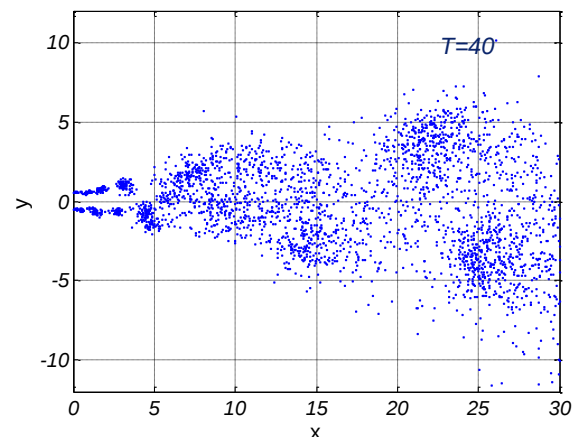


圖 2: 瞬時點渦流分佈圖。

3.2 紊流模式效應

點渦流模式中加入紊流模式主要目標在於促使流場迅速發展至紊流型態。在紊流流場流體速度的能量譜往往於對數尺度下，存在一個斜率 $-\frac{5}{3}$ 隨頻率增加的線性區域，此區域為慣性子區(initial subrange)。數值模擬上，模擬所得的速度之能量頻譜是否能獲得慣性

子區，是可以作為紊流模式的加入是否可正確模擬出紊流場的一個佐證。首先我們沿著平面噴流對稱線($y=0$)不同流向位置進行速度取樣，接著將取樣所得的數值進行能量頻譜分析。圖 3 為距離噴口下游兩個噴口距離($x=2$)之流向能量頻譜，在 $x=2$ 處平面噴流兩側渦結構尚未接觸，此取樣的位置尚處於勢流核內部，此頻譜具有典型剪切流速度能量頻譜的特性，高能量出現在低頻，隨著頻率的增高能量越來越小，在對數尺度下，存在一個線性下降區域，與斜率 $-\frac{5}{3}$ 下降直線相比，發現由低頻高能量往高頻下降的速率比斜率 $-\frac{5}{3}$ 還要快，表此段

$$E(u^2) \propto f^\alpha, \alpha < -\frac{5}{3}$$

在更下游的對稱線之 $x=10$ 處，以下模擬結果顯示此流向位置，其流場之統計量之橫向分佈已達相似分佈的特性，取此流向位置之噴流兩側對稱中心進行速度取樣，並將取樣所得進行能量頻譜分析，圖 4 為所得之對數尺度下流向速度能量頻譜，發現在最大能量頻率後接一直線下降的區域，且此直線下降的區域斜率約為 $-\frac{5}{3}$ ，表示在此區域

$E(u^2) \propto f^{-\frac{5}{3}}$ ，此為三維完全紊流場慣性子區速度能量譜的特性，這表示紊流模式的加入，使的下游相似區之速度能量譜確實具有紊流態速度能量譜的特性。

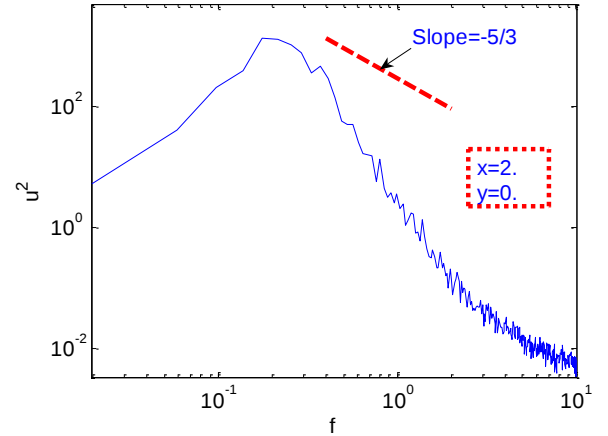


圖 3：上游($x=2$)中心處流向速度頻譜圖。

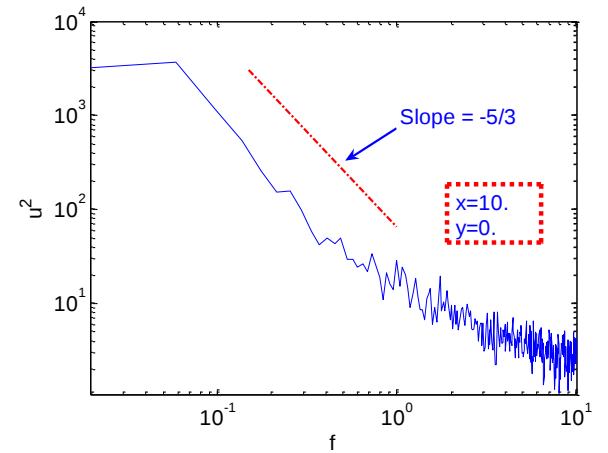


圖 4：相似區($x=10$)中心處流向速度頻譜圖。

3.2 特徵統計量相似分布檢查

圖 5 為流相平均速度在橫向相似分布的情形。其中 $\eta = \frac{y - y_m}{2y_{0.5}}$ ， y_m 為該流向位置之最大平均流向速度 U_m 發生之橫向座標， $y_{0.5}$ 為 y_m 至流向平均速度為 $0.5U_m$ 處之橫向距離，發現平均流相速度在無因次化下幾乎完美的聚集成一條線。

圖 6 為流向擾動速度的均方根相似分佈圖，圖中 u' 為流向擾動速度之均方根值， $u'_{\max}$ 為該流向位置之最大流向擾動速度之均方根值。發現在無因次化調整下亦呈現單一曲線

的分佈情形。綜合圖 5 及圖 6，可發現加入紊流模式，平面噴流模流模式可模擬出相似分佈的流場統計量。

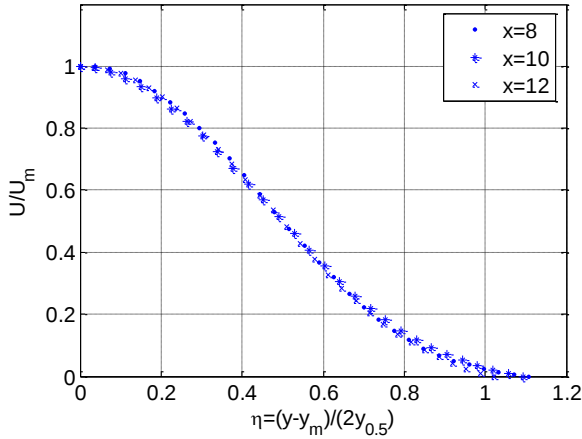


圖 5: 相似區流向平均速度相似分佈圖。

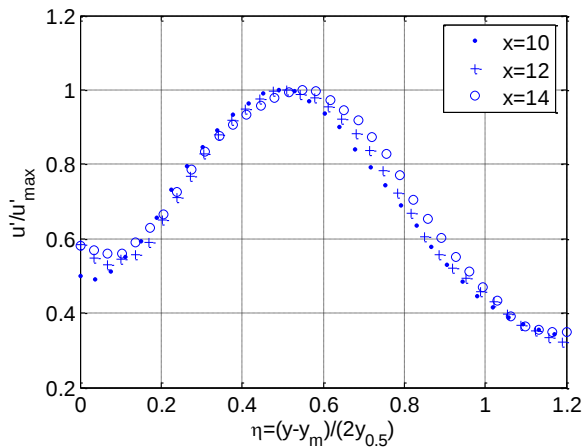


圖 6: 相似區流向擾動速度均方根值相似分佈圖。

3.3 POD 數據分析

取流向位置 $x=10$ 處，不同橫向位置之 200 個點，進行流相速度 u 與橫向速度 v 進行取樣，每個位置取樣次數為 6000，並將取得結果進行 POD 分解。分解得特徵值 λ_i ， $i=1 \cdots 400$ ，共 400 個，相對應的模態為 ϕ_i ， $i=1 \cdots 400$ 。將不同模式特徵值 λ_i 由高排至低的前 20 個，顯示於圖 7。在 POD 分解中所得的特徵值 λ_i ，可視為流場在特徵向量 ϕ_i 方向投

影下的能量，因此全部特徵值之和 $\sum_{i=1}^{400} \lambda_i$ 代表此流向位置擾動速度之全部動能，因此圖 7 之縱座標 $\lambda_i / \sum_{i=1}^{400} \lambda_i$ 表示此流向位置擾動速度場在特徵方向 ϕ_i 所佔能量的比例，發現 400 個模態中前 10 模態即佔速度擾動場能量的 91.58%，其中模態 1 (ϕ_1) 佔全部能量的 48%，模態 2 (ϕ_2) 佔全部能量的 18%。一般剪切流頻譜顯示，紊流擾動速度場能量大部分聚集於低頻，低頻能量可視為大型渦流結構能量之反應，因此 POD 在紊流場大型渦結構的探討上，往往借助其能將擾動速度場大部份能量在其前面幾個模態分離出的特性，用來探討大型渦結構的動態表現。更由於僅需少許的幾個模態就足以涵蓋流場擾動場大部份的能量，因此用來探討紊流態動力系統可有效降低分析的維度，進而提升預測的運算效率。

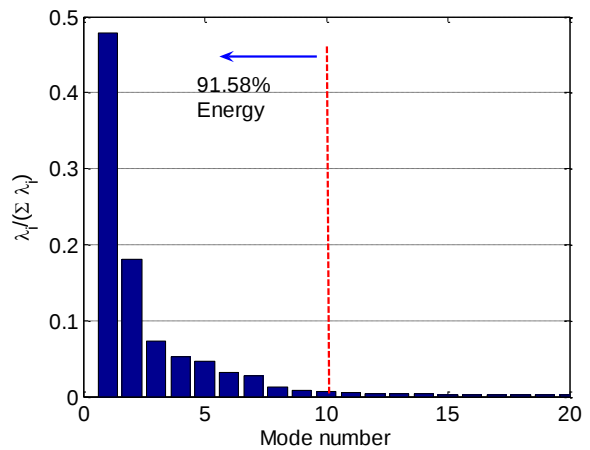


圖 7: POD 模態能量比例由高至低排列長條圖。

為了探討高能模對流場結構的描述特性，以 POD 分解出之模態對流場進行重構，流場流向位置 $x=10$ 處的擾動流向速度以前 m 個模態進行重構，重構所得之擾動速度場為

$$u_m(y, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \phi_i(y),$$

$$\alpha_i(t) = \langle u(y, t), \phi_i(y) \rangle$$

其中 $u(y, t)$ 為擾動流向速度場，今將取前 10 個模態之擾動場近似 $u_m(y, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \phi_i(y)$, $m=10$ 與實際擾動流向速度場 $u(y, t)$ ，在取樣時間 $t = 100 \Delta t$ 進行比較，比較結果顯示於圖 8。發現近似情形相當不錯，差異較大的部分剪切場中一些高間高頻的擾動沒有抓到，這些高頻的是由較小尺度的渦結構所造成，符合一般所說的 POD 分解出來的前幾個模態主要是反映大型渦結構的表現。

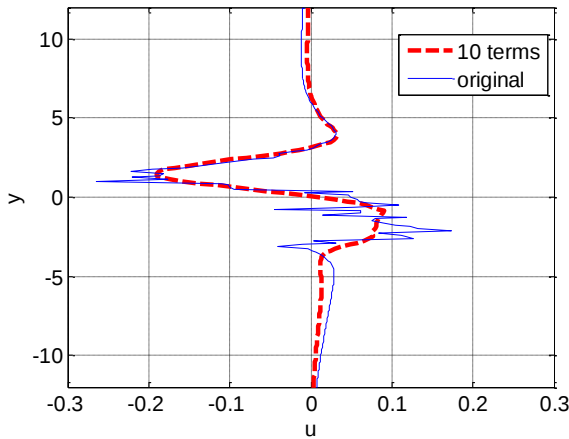


圖 8: $x=10$ 流向瞬時擾動速度(取樣時間 $t=100 \Delta t$)與 POD 取 10 項近似比較橫向分佈圖。

為探討計算出的 400 個模態，由能量高至低取的模態個數對近似結果的影響，定義近似差異性指標

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(t) &= \frac{\|u(y, t) - u_m(y, t)\|}{\|u(y, t)\|} \\ &= \frac{\|u(y, t) - \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \phi_i(y)\|}{\|u(y, t)\|} \end{aligned}$$

其中 $\|\bullet\|$ 代表範數運算，在 $t = 100 \Delta t$ 不同重構

模態數對差異性指標 $\varepsilon_m(t)$ 之影響顯示於圖 9，發現當重構模態數超過 120 個，即 $m \geq 120 \Rightarrow \varepsilon_m(t) \rightarrow 0$ 。

為了確認高能量模態確實反應低頻之大型渦結構，將模態 1, 100 之重構係數 $\alpha_1(t)$ 及 $\alpha_{100}(t)$ 隨時間變化趨勢顯示於圖 10，發現 $\alpha_1(t)$ 在時間上呈現低頻變化情形，而 $\alpha_{100}(t)$ 在時間上則呈現高頻變化的特性。

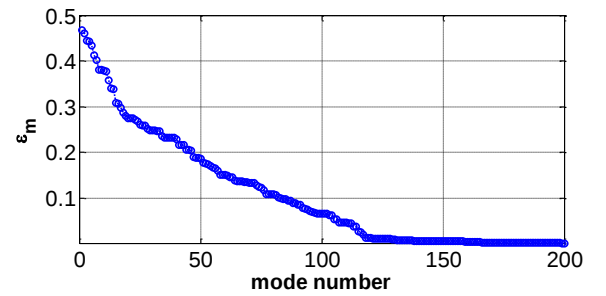


圖 9: $x=10$ 處近似誤差與模態個數關係圖。

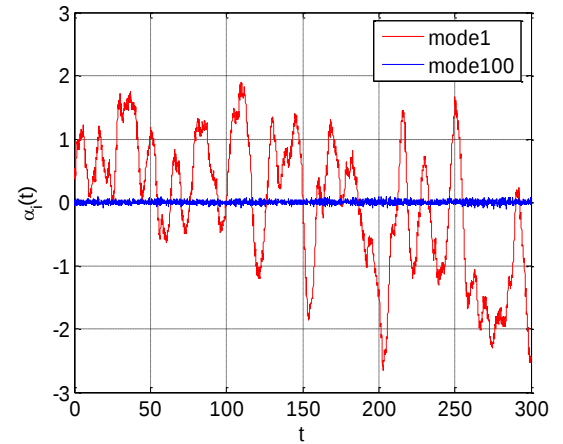


圖 10: $x=10$ 處 POD 模態 1 與模態 100 重構係數隨時間變化圖。

將模態 1、10 及 100 獲的重構係數 $\alpha_1(t)$ 、 $\alpha_{10}(t)$ 及 $\alpha_{100}(t)$ 進行頻譜分析，可獲得不同模態在不同頻率下的能量分佈，結果以對數尺度顯示於圖 11。由結果發現在對數尺度下 $\alpha_1(t)$ 的頻譜在某段區域呈現斜率-3 的直線下降趨勢，這符合二維紊流場慣性子區的能量譜特性，因此有理由相信模態 1 重構出之擾

動場訊號反映出二維大型渦流結構的特性。而在對數尺度下 $\alpha_{10}(t)$ 的頻譜在某段區域呈現斜率 $-5/3$ 的直線下降趨勢，這符合三維紊流場慣性子區的能量譜特性，因此有理由相信模態 10 重構出之擾動場訊號反映出三維紊流場的特性，這部分應視為紊流模式產生的效應。最後在對數尺度下 $\alpha_{100}(t)$ 的頻譜呈現的卻是白噪音的型態，這個部分可視為是流場模擬數值誤差產生的結果。

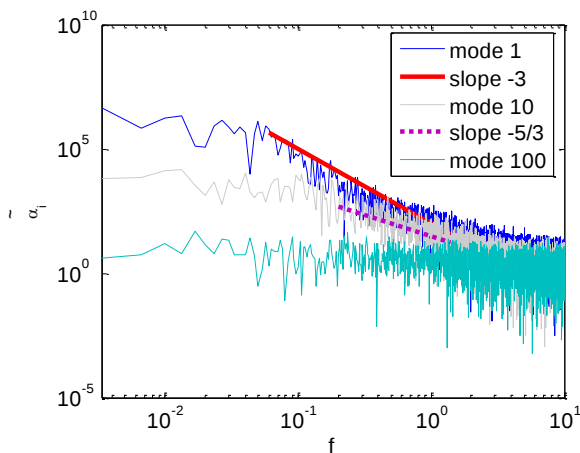


圖 11: $x=10$ 處 POD 模態 1、10、100 重構係數之頻譜圖。

四、結論

本文以點渦流結合小板法建立一個平面噴流渦流模擬模式，計算過程中藉著修訂隨機走步黏性效應的運動黏度值，引入基於混合長度(mixing length)概念的 Lagrangian 紊流模式。平面噴流發展常見的渦層捲起、同號環流渦結構配對、合併等渦結構成長過程、及異號環流渦結構於視流區後面的偏擺等現象，均可在模擬所得的煙線軌跡圖與點渦分佈圖觀察到。

勢流區後中心位置流向擾動速度被取出作頻譜分析，發現在對數尺度下存在斜率呈 $-5/3$ 之線性慣性子區，這現象說明本文之紊流模式可在二維點渦模擬加入具三維紊流特性的速度擾動量。流場特徵量的橫向分佈在

勢流區後亦呈現相似分佈的特性。

為能有效分離紊流場中大型相關(coherent)結構與隨機小尺度的訊息，在下游特徵量具相似分佈位置，取橫向截面時間序列數據進行 POD (proper orthogonal decomposition) 分析，可得橫向數據位置數二倍的模態，本研究每個時間序列數據可得 400 個模態，發現能量最高的前 10 個模態即包含紊流場擾動動能 90% 以上。將不同模態時變振幅做頻譜分析，觀察到高能量模態振幅頻譜具二維紊流特性，即具擬渦能(enstrophy)慣性子區，在對數尺度下存在斜率 -3 的線性區；能量稍微低一點的模態，則具三維紊流能量的慣性子區，在對數尺度下存在斜率 $-5/3$ 的線性區；而能量很低的部份則呈現白噪音形態。因此利用 POD 分析紊流場訊息，確實可有效拆解不同尺度的成份。

參考文獻

1. H. Tennekes, J. L. Lumley, A First Course in Turbulence, MIT Press, 1972.
2. J. O. Hinze, Turbulence, 2nd McGraw-Hill, 1972.
3. S. B. Pope, Turbulent Flows, Cambridge University Press, 2000.
4. Y. Sakai, N. Tanaka, M. Yamamoto, T. Kushida, On the Development of Coherent Structure in a Plane Jet(part 3, Multi-Point Simultaneous Measurement of Main Streamwise Velocity), JSME Int. J. Ser. B., Vol. 79, No. 3, pp. 722-730, 2006 .
5. R. C. Deo, J. Mi, G. J. Nathan, The Influence of Reynolds Number on a Plane Jet, Physics of Fluids, Vol. 20, 075108, 2008.
6. B. J. Cantwell, Organized Motion in Turbulent Flow, Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 13, pp. 457-515, 1981.

7. J. T. C. Liu, Coherent Structures in Transitional and Turbulent Free Flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 21, pp.285-315, 1989.
8. A. K. M. F. Hussain, Coherent Structures and Turbulence, *J. Fluid Mech.*, Vol. 173, pp. 303-356, 1986.
9. F. Hsiao, J. M. Huang, On the Evolution of Instabilities in the Near Field of a Plane Jet, *Physics of Fluid A: Fluid Dynamics*, Vol. 2, pp. 400-412, 1990.
10. Y. L. Yeh, C. C. Hsu, C. H. Chiang, F. B. Hsiao," Vortical Structure Evolutions and Spreading Characteristics of a Plane Jet Flow under Anti-Symmetric, Long-Wave Excitation," *International Journal of Thermal and Fluid Science*, Vol. 33, pp. 630-640, 2009.
11. P. Druault, J. Delville, J. P. Bonnet, Proper Orthogonal Decomposition of the Mixing Layer Flow into Coherent Structures and Turbulent Gaussian Fluctuations, *C. R. Mecanique* 333, pp. 824-829, 2005.
12. D. J. Lucia, P. S. Beran, W. A. Silva, Reduced-Order Modeling: New Approaches for Computational Physics, *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 40, No. 1-2, pp. 51-117, 2004.
13. G. Kerschen, J. C. Golinval, A. F. Vakakis, The Method of Proper Orthogonal Decomposition for Dynamical Characterization and Order Reduction of Mechanical Systems: An Overview. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 41, No. 1-3, pp. 47-169, 2005.
14. J. L. Lumley, The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows, *Atoms, Turbul. Radio Wave Propag.*, pp. 166-178, 1967.
15. J. L. Lumley, *Stochastic Tools in Turbulence*, Academic Press, New York, 1970.
16. F. R. Payne, J. L. Lumley, Large Eddy Structures of the Turbulent Wake Behind a Circular Cylinder, *Phys. Fluids*, S194, 1967.
17. H. P. Bakwell, J. L. Lumley, Viscous Sublayer and Adjacent Wall Region in Turbulent Pipe Flows, *Phys. Fluids*, Vol. 10, pp. 1880-1889, 1967.
18. A. Glezer, Z. Kadioglu, A. J. Pearlstein, Development of an Extended Proper Orthogonal Decomposition and Its Application to a Time Periodically Forced Plane Mixing Layer, *Phys. Fluids. A*, Vol. 1, no. 8, pp. 1363-1373, 1989.
19. G. Berkooz, P. Holmes, J. L. Lumley, The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 25, pp. 539-575, 1993.
20. Y. M. Shim, R. N. Sharma, P. J. Richards, Proper Orthogonal Decomposition Analysis of the Flow Field in a Plane Jet, *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 51, pp. 37-55, 2013.
21. S. V. Gordeyev, F. O. Thomas, Coherent Structure in the Turbulent Planar Jet. Part 1. Extraction of Proper Orthogonal Decomposition Eigenmodes and Their Self-Similarity, *J. Fluid Mech.*, Vol. 414, pp. 145-196, 2000.
22. O. Terashima, Y. Sakai, Y. Goto, K. Onish, K. Nagata, Y. Ito, On the Turbulent Energy Transport Related to the Coherent Structures in a Planar Jet, *Experimental Thermal and*

- Fluid Science, Vol. 68, pp. 697-710, 2015.
23. H. Pastrana, C. Trerino, F. Perez-Flores, L. Martine-Suaategui, TR-PIV measurements of Turbulent CFonfined Imping Twin-Jets in Cross Flow, Expeimental Thermal and Fluid Science, Vol. 136, 6110667, 2022.
24. O. Inoue, Vortex Simulation of a Turbulent Mixing Layer, AIAA Journal, Vol. 23, pp. 367-373, 1985.
25. O. Inoue, Double-Frequency Forcing on Spatially Growing Mixing Layers, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 234, pp. 553-581, 1992.
26. C. M. Ho, L. S. Huang, Subharmonics and vortex merging in mixing layer, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 119, pp. 443-473, 1982.
27. C. C. Hsu, Vortex Method Investigations on Dynamic Behaviors of Forced Turbulent Mixing Layer and Planar Jet, Ph. D. Dissertation, Department of Aeronautics and Astronautics, National Cheng Kung, Tainan, Taiwan, 1994.
28. F. O. Thomas, K. M. K. Prakash, An Experimental Investigation of Natural Transition of an Untuned Planar Jet, Physics of Fluid A: Fluid Dynamics, Vol. 3, pp. 90-105, 1991.
29. I. Weisbrot, I. Wygnanski, On Coherent Structures in Highly Excited Mixing Layer, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 195, pp. 137-159, 1988.
30. R. Krasny, Desingularization of Periodic Vortex Sheet Roll-up, J. Comput. Phys., Vol. 65, pp. 292-313, 1986.
31. R. Krasny, A Study of Singularity Formation in a Vortex Sheet by the Point Vortex Approximation, J. Fluid Mech., Vol. 167, pp. 65-93, 1986.

