

具第一型時變邊界條件雙層平板之熱傳解析解  
A Closed Solution of Heat Conduction in a Two-layer Slab with Time-Varying Boundary  
Conditions of First Kind

林志勳、涂德文

Chih-Hsun Lin, Te-Wen Tu

空軍航空技術學院機械工程科

Department of Mechanical Engineering, Air Force Institute of Technology

摘要

本文利用移位函數法推導兩側均為第一型時變條件之雙層平板一維熱傳解析解。假設平板兩側只受溫度場作用，且每層材料具均質等向性，層間為完美熱接觸。通過引入轉換函數及選用三個不同移位函數，此熱傳系統之方程式被轉換成僅具有齊性邊界條件的偏微分方程式。如此，經過變換後的系統可利用級數展開理論加以求得解析解。本求解方法簡單準確，且所得的級數解收斂速度快。

關鍵字：移位函數法、解析解、完美熱接觸、第一型時變邊界條件

Abstract

The shifting function method is utilized to find an exact solution for the one-dimensional heat conduction of a two-layer slab at two surfaces with time-varying boundary conditions of the first kind. The slab is assumed to subject to temperature field at both ends and each layer has homogeneous and isotropic material and with perfect thermal contact at the interface. By introducing the transformed function and three specially chosen shifting functions, the system is transformed into a partial differential equation with homogenous boundary conditions only. The transformed system is thus solved by series expansion theorem. The methodology is simple and accurate and the convergence rate of the present solution is fast.

Keywords: shifting function method, exact solution, perfect thermal contact, time-varying boundary conditions of first kind

一、前言

時變溫度場加熱於牆壁、平板或以雷射加熱於固體表面上，是重要的熱傳應用領域。許多研究者將此類問題簡化為雙側具有第一型時變邊界條件之一維平板熱傳模型。通常，此基本解可逕由積分轉換法或拉氏轉換法等求出[1]。此外，Caffagni 等人 [2] 亦曾於 2013 年利用格林及杜漢默積分公式求解本問題；為增快級數解之收斂速度，他們得同時採用兩種不同數值近似法。不過，利用上述方法獲得的近似解析解，若非難以產生內域各點溫度數值便

是需要計算更多項的迭代項。

由李森墉教授命名的移位函數法最早於 1996 年用於求解具時變邊界條件之不均勻樑[3]的解析解。之後，於 2010 年他拓展此法用來求解具單邊時變熱對流係數之平板熱傳問題解析解[4]。在此同時，具有物理意義的移位函數亦被提出求解相同熱傳問題[5]。此外，此法亦被用來求取不均勻平板[6]或中空圓柱[7]之熱傳問題解析解。綜合言之，利用移位函數法求解解析解之主要優點，在於毋須使用積分轉換便能利用得到的幾項級數解求得相關數值。

多層複合介質常見於寬廣工業、環境以及

生物場上，諸如透平機、燃料電池以及熱車系統等均為其應用實例[8]。本文將利用移位函數法求取兩邊均具第一型時變邊界條件雙層平板熱傳問題之解析解。

## 二、熱傳分析模型

考慮兩端均具第一型時變邊界條件之雙層平板熱傳系統，平板兩外側均為已知時變溫度場，如圖1所示。假設各層為均質等向性材料，但每層不同。考慮層間為完美熱接觸，此時平板第一層之統制偏微分方程式為

$$k_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} = \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t}, \quad x \in (0, L_1), \quad t \in (0, t_f] \quad (1)$$

而邊界和起始條件則分別為

$$T_1(0,t) = f_0(t), \quad T_1(L_1,t) = f_{L_1}(t) \quad (2)$$

$$T_1(x,0) = T_0 \quad x \in [0, L_1] \quad (3)$$

相似地，平板第二層之統制偏微分方程式為

$$k_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} = \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t}, \quad x \in (L_1, L), \quad t \in (0, t_f] \quad (4)$$

此時邊界和起始條件分別為

$$T_2(L_1,t) = f_{L_1}(t), \quad T_2(L,t) = f_L(t) \quad (5)$$

$$T_2(x,0) = T_0 \quad x \in [L_1, L] \quad (6)$$

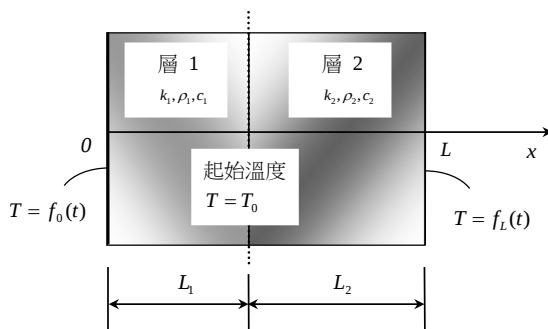


圖 1 一維雙層平板之熱傳模型

上述式子中， $T_i(x,t)$  ( $i=1,2$ ) 分表第 1 層和第 2 層之溫度函數； $x$  為空間變數； $t$  為時間變數以及  $t_f$  代表整個加熱過程之時間； $L_i$  ( $i=1,2$ ) 和

$L$  則分表平板各層之長度以及總長度。此外， $k_i$  ( $i=1,2$ )、 $\rho_i$  ( $i=1,2$ ) 以及  $c_i$  ( $i=1,2$ ) 分表各層之導熱性、密度以及比熱。 $f_0(t)$  為第 1 層之外側時變溫度函數， $f_{L_1}(t)$  為層與層間內邊界之時變溫度函數以及  $f_L(t)$  為第 2 層之外側時變溫度函數。吾人假設  $T_0$  為平板起始溫度以及在起始時間要滿足下述關係式

$$f_0(0) = f_{L_1}(0) = f_L(0) = T_0。$$

## 三、解析解

先假設兩未知溫度函數  $f_0(t)$  和  $f_L(t)$  為已知，今欲求解  $T_i(x,t)$  ( $i=1,2$ )。是故，此時可將一維雙層平板熱傳系統視為正向問題。 $f_{L_1}(t)$  可利用內層邊界之熱通量應相等條件求得。此外，移位函數法 [3-7] 將被用來推導以方程式 (1)-(6) 代表的熱傳問題之解析解。

### 1. 變數變換

先將溫度函數  $T_i(x,t)$  ( $i=1,2$ ) 分解為

$$\begin{cases} T_1(x,t) = U_1(x,t) + g_0(x)f_0(t) + g_{L_1}(x)f_{L_1}(t) & x \in [0, L_1] \\ T_2(x,t) = U_2(x,t) + g_{L_1}(x)f_{L_1}(t) + g_L(x)f_L(t) & x \in [L_1, L] \end{cases} \quad (7)$$

此處  $U_i(x,t)$  ( $i=1,2$ ) 為轉換函數，且  $g_0(x)$ 、 $g_{L_1}(x)$  和  $g_L(x)$  為三個待求的不同移位函數。

將式 (7) 依序代入式 (1) 和 (4) 內，吾人可得下述偏微分方程式

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \left[ \frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial x^2} + g_0''(x)f_0(t) + g_{L_1}''(x)f_{L_1}(t) \right] \\ &= \frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t} + g_0(x)\dot{f}_0(t) + g_{L_1}(x)\dot{f}_{L_1}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\alpha_2 \left[ \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial x^2} + g_{L_1}''(x) f_{L_1}(t) + g_{L_2}''(x) f_{L_2}(t) \right] \quad (9)$$

$$= \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} + g_{L_1}(x) \dot{f}_{L_1}(t) + g_{L_2}(x) \dot{f}_{L_2}(t)$$

此時，平板各層之熱擴散率為  $\alpha_i = \frac{k_i}{\rho_i c_i}$  ( $i=1, 2$ )。且注意雙引號和逗號分別表函數對  $x$  與  $t$  微分兩次和一次。今相應之邊界條件，式(2)和(5)將變成

$$\begin{cases} U_1(0, t) + g_0(0) f_0(t) + g_{L_1}(0) f_{L_1}(t) = f_0(t) & \text{層1} \\ U_2(L_1, t) + g_{L_1}(L_1) f_{L_1}(t) + g_{L_2}(L_1) f_{L_2}(t) = f_{L_1}(t) & \text{層2} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} U_1(L_1, t) + g_0(L_1) f_0(t) + g_{L_1}(L_1) f_{L_1}(t) = f_{L_1}(t) & \text{層1} \\ U_2(L, t) + g_{L_1}(L) f_{L_1}(t) + g_{L_2}(L) f_{L_2}(t) = f_{L_2}(t) & \text{層2} \end{cases} \quad (11)$$

同時起始條件，式(3)和(6)變為

$$\begin{cases} U_1(x, 0) + g_0(x) f_0(0) + g_{L_1}(x) f_{L_1}(0) = T_0 & \text{層1} \\ U_2(x, 0) + g_{L_1}(x) f_{L_1}(0) + g_{L_2}(x) f_{L_2}(0) = T_0 & \text{層2} \end{cases} \quad (12)$$

## 2. 轉移函數

為後文方便使用，吾人令  $g_0(x)$ 、 $g_{L_1}(x)$

及  $g_{L_2}(x)$  滿足下述之微分方程式與邊界條件

$$g_0''(x) = 0, \quad g_{L_1}''(x) = C, \quad g_{L_2}''(x) = 0 \quad (13)$$

$$g_0(0) = 1, \quad g_0(L_1) = 0, \quad g_{L_1}(L_1) = 0, \quad g_{L_2}(L) = 1 \quad (14)$$

$$g_{L_1}(0) = 0, \quad g_{L_1}(L_1) = 1, \quad g_{L_2}(L) = 0 \quad (15)$$

同時求解上述方程式，吾人即可求得三個移位函數分別為

$$g_0(x) = \frac{L_1 - x}{L_1}, \quad g_{L_1}(x) = \frac{x - L_1}{L_2}, \quad g_{L_2}(x) = \frac{x(L - x)}{L_1 L_2} \quad (16)$$

其中，式(13)之常數  $C$  為  $C = \frac{-2}{L_1 L_2}$ 。

今將式(8)–(9)重新以  $U_i(x, t)$  ( $i=1, 2$ ) 表出即為

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} - \alpha_1 \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial x^2} \\ = -g_0(x) \dot{f}_0(t) - g_{L_1}(x) \dot{f}_{L_1}(t) + C \alpha_1 f_{L_1}(t) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} - \alpha_2 \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial x^2} \\ = -g_{L_1}(x) \dot{f}_{L_1}(t) - g_{L_2}(x) \dot{f}_{L_2}(t) + C \alpha_2 f_{L_2}(t) \end{aligned} \quad (18)$$

此時相應邊界條件，即式 (10) - (11) 將變為如下具齊性：

$$U_1(0, t) = 0, U_1(L_1, t) = 0, U_2(L_1, t) = 0, U_2(L, t) = 0 \quad (19)$$

相應起始條件，式 (12) 將變為

$$\begin{cases} U_1(x, 0) = T_0[1 - g_0(x) - g_{L_1}(x)] = U_{10}(x) & \text{層1} \\ U_2(x, 0) = T_0[1 - g_{L_1}(x) - g_{L_2}(x)] = U_{20}(x) & \text{層2} \end{cases} \quad (20)$$

## 3. 級數展開理論

底下將利用特徵函數展開理論求取轉換函數  $U_i(x, t)$  ( $i=1, 2$ )。為滿足式(20)之齊性邊界條件，吾人可獲得相應的第  $n$  個特徵函數  $\phi_{ni}(x)$  ( $i=1, 2$ ) 為

$$\begin{cases} \phi_{n1}(x) = \sin(\lambda_{n1} x) & \text{層1} \\ \phi_{n2}(x) = \sin[\lambda_{n2}(x - L_1)] & \text{層2} \end{cases} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

其中，特徵根  $\lambda_{ni}$  ( $n=1, 2, 3, \dots; i=1, 2$ ) 為下述方程式之根：

$$\sin(\lambda_{ni} L_i) = 0 \quad \text{層 } i \quad (i=1, 2) \quad (22)$$

此時，第 1 層和第 2 層之特徵根為

$$\lambda_{ni} = \frac{n\pi}{L_i} \quad (n=1, 2, 3, \dots; i=1, 2) \quad \circ \text{ 而任兩特徵函}$$

數的內積則為

(1) 第 1 層

$$\int_0^{L_1} \phi_{m1}(x)\phi_{n1}(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ N_{n1} = \frac{L_1}{2} & m = n \end{cases} \quad (23)$$

(2) 第 2 層

$$\int_{L_1}^L \phi_{m2}(x)\phi_{n2}(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ N_{n2} = \frac{L_2}{2} & m = n \end{cases} \quad (24)$$

其中， $N_{ni} (i=1, 2)$  表平板不同層特徵函數之範數(norm)。

為求解式 (17) 和(18)，吾人先以級數形式將 $U_i(x, t) (i=1, 2)$ 展開成

$$U_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{ni}(x)q_{ni}(t) \quad i=1, 2 \quad (25)$$

其中， $q_{ni}(t) (n=1, 2, 3, \dots; i=1, 2)$  稱為待時變廣義坐標。將式 (25)反代回式(17)和(18) 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\phi_{n1}(x)\dot{q}_{n1}(t) - \alpha_1\phi_{n1}''(x)q_{n1}(t)\} \quad (26)$$

$$= -g_0(x)\dot{f}_0(t) - g_{L_1}(x)\dot{f}_{L_1}(t) + C\alpha_1 f_{L_1}(t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\phi_{n2}(x)\dot{q}_{n2}(t) - \alpha_2\phi_{n2}''(x)q_{n2}(t)\} \quad (27)$$

$$= -g_{L_1}(x)\dot{f}_{L_1}(t) - g_L(x)\dot{f}_L(t) + C\alpha_2 f_{L_1}(t)$$

再者，將上述等號右邊之 $g_0(x)$ 、 $g_{L_1}(x)$ 、

$g_L(x)$ 以及常數 1 亦分別以級數展開，吾人可將式(26)和(27)展開成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\phi_{n1}(x)\dot{q}_{n1}(t) - \alpha_1\phi_{n1}''(x)q_{n1}(t)\} \quad (28)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [-\gamma_n\phi_{n1}(x)\dot{f}_0(t) - \bar{\gamma}_{n1}\phi_{n1}(x)\dot{f}_{L_1}(t) + \beta_{n1}\phi_{n1}(x)C\alpha_1 f_{L_1}(t)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\phi_{n2}(x)\dot{q}_{n2}(t) - \alpha_2\phi_{n2}''(x)q_{n2}(t)\} \quad (29)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [-\bar{\gamma}_{n2}\phi_{n2}(x)\dot{f}_{L_1}(t) - \bar{\bar{\gamma}}_n\phi_{n2}(x)\dot{f}_L(t) + \beta_{n2}\phi_{n2}(x)C\alpha_2 f_{L_1}(t)]$$

其中， $\gamma_n$ 、 $\bar{\gamma}_{n1}$ 、 $\bar{\gamma}_{n2}$ 、 $\bar{\bar{\gamma}}_n$ 、 $\beta_{n1}$ 和 $\beta_{n2}$ 分別定義為

$$\gamma_n = \frac{\int_0^{L_1} g_0(x)\phi_{n1}(x)dx}{N_{n1}} = \frac{2}{n\pi} \quad (30)$$

$$\bar{\gamma}_{n1} = \frac{\int_0^{L_1} g_{L_1}(x)\phi_{n1}(x)dx}{N_{n1}} = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} + \frac{8L_1}{n^3\pi^3L_2} & n=1, 3, 5, \dots \\ -\frac{2}{n\pi} & n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (31)$$

$$\bar{\gamma}_{n2} = \frac{\int_{L_1}^L g_{L_1}(x)\phi_{n2}(x)dx}{N_{n2}} = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} + \frac{8L_2}{n^3\pi^3L_1} & n=1, 3, 5, \dots \\ \frac{2}{n\pi} & n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (32)$$

$$\bar{\bar{\gamma}}_n = \frac{\int_{L_1}^L g_L(x)\phi_{n2}(x)dx}{N_{n2}} = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & n=1, 3, 5, \dots \\ -\frac{2}{n\pi} & n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (33)$$

$$\beta_{n1} = \frac{\int_0^{L_1} \phi_{n1}(x)dx}{N_{n1}} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n=1, 3, 5, \dots \\ 0 & n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (34)$$

$$\beta_{n2} = \frac{\int_{L_1}^L \phi_{n2}(x)dx}{N_{n2}} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n=1, 3, 5, \dots \\ 0 & n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (35)$$

仔細觀察方程式(28)與(29)，吾人可得

$$\begin{aligned} & \phi_{n1}(x)\dot{q}_{n1}(t) - \alpha_1\phi_{n1}''(x)q_{n1}(t) \\ & = [-\gamma_n\dot{f}_0(t) - \bar{\gamma}_{n1}\dot{f}_{L_1}(t) + \beta_{n1}C\alpha_1 f_{L_1}(t)]\phi_{n1}(x) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \phi_{n2}(x)\dot{q}_{n2}(t) - \alpha_2 \phi_{n2}''(x)q_{n2}(t) \\ & = [-\bar{\gamma}_{n2}\dot{f}_{L_1}(t) - \bar{\gamma}_n\dot{f}_L(t) + \beta_{n2}C\alpha_2 f_{L_1}(t)]\phi_{n2}(x) \end{aligned} \quad (37)$$

今以  $\phi_{ni}(x) (i=1,2)$  分別對式(36)和(37)逐項內積且同時在內域積分，吾人可得如下之微分方程式

$$\dot{q}_{n1}(t) + \alpha_1 \lambda_{n1}^2 q_{n1}(t) = \xi_{n1}(t), \quad \dot{q}_{n2}(t) + \alpha_2 \lambda_{n2}^2 q_{n2}(t) = \xi_{n2}(t) \quad (38)$$

其中， $\xi_{ni}(t) (i=1,2)$  定義為

$$\xi_{n1}(t) = -\gamma_n \dot{f}_0(t) - \bar{\gamma}_{n1} \dot{f}_{L_1}(t) + \beta_{n1} C \alpha_1 f_{L_1}(t) \quad (39)$$

$$\xi_{n2}(t) = -\bar{\gamma}_{n2} \dot{f}_{L_1}(t) - \bar{\gamma}_n \dot{f}_L(t) + \beta_{n2} C \alpha_2 f_{L_1}(t) \quad (40)$$

此時相應之起始值  $q_{ni}(0) (i=1,2)$  變成

$$\begin{aligned} q_{n1}(0) &= \frac{\int_0^{L_1} \phi_{n1}(x) U_{10}(x) dx}{N_{n1}} \\ &= \begin{cases} T_0 \left( -\frac{8L_1}{n^3 \pi^3 L_2} \right) & n=1, 3, 5, \dots \\ 0 & n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} q_{n2}(0) &= \frac{\int_{L_1}^L \phi_{n2}(x) U_{20}(x) dx}{N_{n2}} \\ &= \begin{cases} T_0 \left( -\frac{8L_2}{n^3 \pi^3 L_1} \right) & n=1, 3, 5, \dots \\ 0 & n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (42)$$

考慮起始條件  $q_{ni}(0) (i=1,2)$ ，式(38)之完整解將如下：

$$q_{n1}(t) = q_{n1}(0) \cdot e^{-\alpha_1 \lambda_{n1}^2 t} + \int_0^t \xi_{n1}(\varphi) \cdot e^{-\alpha_1 \lambda_{n1}^2 (t-\varphi)} d\varphi \quad (43)$$

$$q_{n2}(t) = q_{n2}(0) \cdot e^{-\alpha_2 \lambda_{n2}^2 t} + \int_0^t \xi_{n2}(\varphi) \cdot e^{-\alpha_2 \lambda_{n2}^2 (t-\varphi)} d\varphi \quad (44)$$

#### 4. 全域之溫度和熱通量

將式(16)、(21)、(25)與(43)代回式(7)，吾人可得兩端具已知溫度場之一維雙層平板熱傳解

析解如下：

(1) 第1層

$$\begin{aligned} T_1(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [\sin(\lambda_{n1} x) q_{n1}(t)] \\ &+ \frac{L_1 - x}{L_1} f_0(t) + \frac{x(L-x)}{L_1 L_2} f_{L_1}(t) \end{aligned} \quad (45)$$

(2) 第2層

$$\begin{aligned} T_2(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [\sin(\lambda_{n2} (x - L_1)) q_{n2}(t)] \\ &+ \frac{x(L-x)}{L_1 L_2} f_{L_1}(t) + \frac{x - L_1}{L_2} f_L(t) \end{aligned} \quad (46)$$

將上述方程式對  $x$  微分再分別乘上  $(-k_1)$  及  $(-k_2)$ ，吾人可得第 1 層和第 2 層之熱通量函數如下

$$\begin{aligned} q_1(x, t) &= -k_1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_{n1} \cos(\lambda_{n1} x) q_{n1}(t)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{L_1} f_0(t) + \frac{L-2x}{L_1 L_2} f_{L_1}(t) \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} q_2(x, t) &= -k_2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_{n2} \cos(\lambda_{n2} (x - L_1)) q_{n2}(t)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{L-2x}{L_1 L_2} f_{L_1}(t) + \frac{1}{L_2} f_L(t) \right\} \end{aligned} \quad (48)$$

今考慮第 1 層與第 2 層間之相容條件，亦即須滿足熱通量關係式  $q_1(L_1, t) = q_2(L_1, t)$ ，吾人可得下式：

$$\begin{aligned} & k_1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_{n1} (-1)^n q_{n1}(t)] - \frac{1}{L_1} f_0(t) + \frac{L_2 - L_1}{L_1 L_2} f_{L_1}(t) \right\} \\ &= k_2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_{n2} q_{n2}(t)] + \frac{L_2 - L_1}{L_1 L_2} f_{L_1}(t) + \frac{1}{L_2} f_L(t) \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

#### 四、討論

吾人假設層與層間為完美熱接觸，故溫度場具連續性，未知  $f_{L_1}(t)$  可利用式(49)求得。不

過，因為  $q_{ni}(t) (i=1,2)$  亦內含  $f_{L_1}(t)$ ，無法直接推導出關係式，求解時只能先假設  $f_{L_1}(t)$  的形式(如多項式或三角函數等)，再利用最小平

方法求得其相應之係數。當然，如果一開始將層間熱通量相等，加入式(1)至(6)一起求解也是可行的方式。

再者，如果考慮層間為不完美熱接觸，熱通量相等條件不變，另一內層邊界條件將變為

$$-k_1 \frac{\partial T_1(L_1, t)}{\partial x} = h_2 [T_1(L_1, t) - T_2(L_2, t)] \quad (50)$$

其中  $h_2$  表第二層之熱對流係數，合併重新求解將較複雜。

### 五、結論

本文已利用移位函數法求得具第一型時變邊界條件雙層平板之解析解。本文結果除了可繼續延伸推導至非完美熱接觸情況外，也可繼續考慮更多層平板情況。此外，可利用推導得解析解作逆運算分析。

### 參考文獻

- [1] Özisik, M. N., "Boundary Value Problems of Heat Conduction", *International Textbook Company*, pp. 43-100, Pennsylvania, 1968.
- [2] Caffagni, A., Angeli, D., Barozzi, G. S., and Polidoro, S., "A Revised Approach for One-Dimensional Time-Dependent Heat Conduction in a Slab", *ASME, J. of Heat Transfer*, vol. 135, pp. 031301-1 ~ 031301-8, 2013.
- [3] Lee, S. Y.; Lin, S. M., Dynamic analysis of nonuniform beams with time-dependent elastic boundary conditions, *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 63, no. 2, pp. 474-478, 1996.
- [4] Chen, H. T., Sun, S. L., Huang, H. C., and Lee, S. Y., "Analytic Closed Solution for the Heat Conduction with Time-dependent Heat Convection Coefficient at One Boundary", *CMES*, vol. 59, no. 2, pp. 107-126, 2010.
- [5] Tu, T. W. and Lee, S. Y., "A New Analytic Solution for the Heat Conduction with Time-Dependent Heat Transfer Coefficient", *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and*

*Mechatronics Engineering*, vol. 8, no. 8, pp. 1372-1377, 2014.

- [6] Lee, S. Y. and Huang, T. W., "Exact solutions for Heat Conduction in Non-uniform Mediums with General Time-Dependent Boundary Conditions", *J. Chinese Society of Mechanical Engineering*, vol.34, no.6, pp.475-485, 2013.
- [7] Lee, S. Y. and Huang, C. C., "Exact solutions for Heat Conduction in Functionally Graded Circular Hollow Cylinders with Time Dependent Boundary Conditions", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, Article ID 816385, 8 pages, 2013.
- [8] R. Chiba, "An analytical solution for transient heat conduction in a composite slab with time-dependent heat transfer coefficient", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2018, Article ID 4707860, 11 pages <https://doi.org/10.1155/2018/4707860>.