

考慮橋梁-土壤互制與噪訊影響下隔震橋梁之物理參數識別

Physical-parameter Identification of an Isolated Bridge with Considering Bridge-Soil Interaction and Noise Signal

黃銘智^{1,*} 葉崇偉² 張哲榮³ 林啟裕⁴ 陳志豪⁵ 劉建均⁶
Ming-Chih Huang^{1,*} Chung-Wei Yeh² Jer-Rong Chang³
Chi-Yu Lin⁴ Zhi-Hao Chen⁵ Chien-Chun Liu⁶

^{1,2,3,5,6} 空軍航空技術學院飛機工程系 ⁴ 空軍航空技術學院航空電子工程科

^{1,2,3,5,6} Department of Aircraft Engineering, Air Force Institute of Technology

⁴ Department of Aero-Electronic Engineering, Air Force Institute of Technology

摘要

本研究旨在發展一個識別過程，以探討考慮橋梁-土壤互制下隔震橋梁的動力特性。橋柱視為線性模型，而樁基礎將以溫克「梁在彈性基礎上」之模式，來模擬樁基礎之等值基礎勁度與等值基礎阻尼係數，另支承系統則取為雙線性-遲滯模型。此非線性遲滯性可用一個背骨曲線以反映其特徵。據此，一個多值的回復力可轉換為單值函數，以利識別分析的進行。本文所提出之運算可識別出各樁基礎、橋柱與支承系統之物理參數，這些參數在橋梁健康監測中將可提供相當有用之訊息。最後，本文藉由一數值範例來證明所提出技術使用於考慮橋梁-土壤互制下具部分非線性隔震橋梁物理參數識別的可行性與正確性，而此數值範例使用 5% 噪訊比的白噪訊號，期能更真實的模擬實測資料。

關鍵詞：物理參數識別、土壤-橋梁互制、隔震橋梁、鉛心橡皮支承墊、非線性遲滯、噪訊

Abstract

This paper intends to develop an identification process to investigate the dynamic characteristics of an isolated bridge considering the bridge-soil interaction. A linear model is used for the pier and a model of foundation used Wink beam on elastic foundation to simulate the equivalent foundation stiffness and damping coefficient while a bilinear hysteretic model is chosen for the bearing system. This nonlinear hysteresis is characterized through a backbone curve. Accordingly, the multi-value restoring force can be transformed into a single-value function to carry out the identification analysis. The proposed algorithm extracts individually the physical parameters of each pile foundation, pier and each bearing system that are considered useful information in structural health monitoring. A numerical example is conducted to demonstrate the feasibility (with an artificial white noise signal of 5% noise-to-signal ratio) of using the proposed technique for physical parameter identification of partially inelastic isolated bridges considering Soil-bridge interaction.

Key Words: Physical-parameter identification, Isolated bridge, Lead-rubber-bearings,

Nonlinear hysteresis, Noise signal.

1. 前言

橋梁為連接鐵、公路交通運輸系統所不可或缺之結構物。其在強烈地震下，仍應具有維持連接運輸線之功能，以確保人類賴以維生的運輸系統不致中斷，而造成人類生命、財產的損失。早期橋梁的設計是以增加橋梁的強度來抵抗地震力，但紐西蘭規範 (Ministry of Works and Development) (1978) 和 AASHTO(1989) 皆認為，設計橋梁在強烈地震作用下，仍應保持在彈性範圍內是不經濟的[1]，故允許橋梁在強震下具有塑性變形（即允許產生塑性鉸）。而傳統的耐震設計即是利用材料的塑性變形來消散地震能量[2]。近三十年來，橋梁結構物於大型地震作用下，使用隔震裝置(Isolation device)以降低結構物的損傷為一相當有效的方式。隔震橋梁(Isolated bridge)使用柔性支承墊的隔震原理，主要是利用其低水平勁度來延長橋梁的週期，其因週期的延長，而避開了地震主週期，進而達到降低地震力的輸入，及減少地震反應的效果。從 70 年代初期起，各種隔震系統(Isolated system)的解析解與實驗已被許多學者們廣泛地研究，其亦已廣泛地被運用於世界各地[3-4]。其中，使用鉛心橡皮支承墊(Lead-rubber-bearings, LRBs)做為橋梁系統之隔震裝置，已被廣泛地使用於實際結構物上，包括紐西蘭、

日本、美國、義大利、中國與台灣等[5-7]。

由於實際橋梁系統的尺寸較大，欲以實驗去評估隔震的效益誠屬不易。惟為確實掌握其受震下的動力行為，仍宜進行現場測試，以作為爾後設計與建造隔震橋梁的參考。一般現地實驗的內容不外微震測試、強迫振動測試與自由振動測試[8]。利用微震測試結果可瞭解隔震橋梁於低載重作用下(例如風力等)的行為；強迫振動測試結果可視為結構物受到較小地震下的動力行為，而自由振動測試結果則可用於評估橋梁在中、小地震下的動力行為。然而，現地實驗無法模擬強震下的動力行為，而其正是設計隔震橋梁首應考量的。是以若能在隔震橋梁上安裝監測儀器，當有強烈地震發生時，即可量測到橋體的動力反應。利用這些反應數據，吾人即可利用系統識別的技巧來求得隔震橋梁的動力特性，進而瞭解隔震橋梁分析模型與設計的正確性。以作為日後其他隔震橋梁設計的參考。

事實上，系統識別是利用輸出值與理論值間的差異最小化，以決定結構參數的一種技巧。於一般隔震橋梁設計上，必須考慮在地震力作用下橋體的動力行為，然而，為了瞭解橋體在地震力作用下的動力行為，則必須藉助於系統識別(System identification)的技巧。系統識別可說是結構動力分析的逆問題。因在實際問題上，系統的參數值為未知，就連系統的模型也

不完全知道，這有別於動力分析時，系統的數學模式與參數皆假設為已知之情形。所以，系統識別就是藉由量測到的輸入與輸出資料，從而估測系統的參數與結構模型之技巧。

系統識別一般可區分為參數識別與非參數識別。前者是指識別系統具有物理意義的參數，諸如一般結構動力分析問題中的阻尼比、頻率等[9,10,11]。而後者乃假設系統輸出與輸入間的關係可用一數學函數表示（例如 Chebyshev 正交函數），識別此函數的係數即為非參數識別[12,13]。此外，亦可依識別時所用資料是在時間域上或轉換至頻率域區分。在頻率域的識別主要是由轉換函數著手。若系統有非線性行為，一般配合移動時間窗技巧(Moving window technique)[9]。系統識別方面的研究，有 Hoshiya[14]以推廣卡氏過濾理論與加權體循環流程 (Weighted global iteration procedure)進行識別；Tan and Cheng[15,16]提出疊代識別法(Iterative identification algorithm)並配合廣義振態理論，對受限於量測資料不足的非線性系統進行識別，其主要是根據振態掃除(Model sweep concept)與帶寬過濾過程(Band-pass filtering process)。近二十餘年來鑑於美國與日本經過幾次大地震後橋梁損傷嚴重，致使隔震橋梁迅速地發展。雖然現今隔震橋梁的實測資料有限，然而隔震橋梁於受震下的實

際行為評估已持續多年，且方興未艾。Chaudhary 等提出一種兩階段的系統識別方法(Two-step system identification)，此方法使用模態模型(Modal model)以評估出結構物的物理參數，研究指出使用此法於隔震橋梁，當輸入加速度尖峰值時，結構物模態頻率的改變與阻尼比相關[17]。Furukawa 等提出一種預測誤差法(Prediction error method, PEM)，此法使用一種非線性的狀態-空間模型(Nonlinear state-space model)，以模擬單方向自由度的隔震系統，並進行系統識別，而此隔震系統的回復力是被假設為片段連續的線性關係(Piecewise linear restoring force)[18]。Furukawa 更進一步使用非線性狀態-空間模型，並配合使用 PEM 法對基部隔震建築物進行識別研究，研究中使用變異的非線性回復力模型，且使用雙向的實測反應資料進行識別，其使用之模型有：簡化的雙線性模型(Simple bilinear model)、雙線性多重剪力彈簧模型(Bilinear multiple shear spring model)與三線性多重剪力彈簧模型(Trilinear MSS model)，經多次的識別結果顯示，使用三線性的遲滯多重剪力彈簧模型以模擬實際的遲滯回復力，得到相當良好的結果[19]。Loh 等[20]應用兩種識別技術，並分別利用環境振動資料與地震反應資料以識別出中間樓層隔震建物(Mid-story isolation building)的時變

(Time-varying)動態特性，文中將遞迴歸隨機子空間識別法(Recursive stochastic subspace identification method)使用於環境振動資料之識別，然而對於地震反應資料則使用遞迴歸子空間識別法(Recursive subspace identification)，研究最後對樓層隔震建築物的識別動態特性進行比較，並對中間樓層隔震建築物非線性行為的影響進行詳盡之討論。Loh 等[21]提出使用輸入-輸出動力反應資料，並基於子空間識別運算(Subspace identification algorithm)法進行結構動態特性之識別，文中結合子空間識別運算與移除不直接相關模態的技術將其運用於實際系統之識別；研究使用三個結構物(一座 7 層樓鋼筋混凝土建物、一座中間樓層隔震建築物和一座隔震橋梁)運用過去 15 年中的地震資料進行識別分析，最後藉由識別出的基本模態之頻率與阻尼比的變化情形，對上述三座建築物的服務性能進行評估與詳盡討論。

傳統建築物的耐震設計，是假設建築物位於固接基礎(Fixed-base)上以簡化分析，然而，事實上支撐建築物的土壤是允許其由於自身的變形而導致某種程度上的運動，此種現象將引起結構系統全體勁度的降低，亦將造成結構系統自然週期的增加。由於土壤柔性(Soil-flexibility)造成結構物基礎面的部份剛接現象，將改

變結構物的反應，此種存在於土壤與結構物間相互依存的行為，被稱為土壤-結構互制 (Soil-Structure Interaction, SSI)。於此背景下，由反應譜曲線的臨界研究中顯示，由於自然週期的改變將導致加速度頻譜的明顯改變，所以，於地震力作用下因側向自然週期的增加，將引起建築物反應的巨烈改變[22, 23, 24]。此種柔性土壤效應，現今已被建議經由使用特定的勁度彈簧計算而得，且已詳加規定於文獻中[25]。一般橋梁大都座落於樁基礎上，所以考慮土壤—結構互制問題 (Soil-structure interaction)有其必要性。結構物基礎承受上部結構的荷重，當地下基礎與土壤間作用力達到平衡時，即可支承上部結構，並經由沉陷量及側向位移等因素的控制，以確保上部結構的使用性 (Serviceability)。考慮這種土壤，地下基礎與上部結構物間之交互作用，即為土壤-結構互制問題。近 40 年來這個問題一直是各界探討的焦點，惟多侷限於房屋結構和核能廠建物與土壤的互制，至於橋梁與土壤互制的問題，則鮮有人討論[26,27]。對於隔震結構物，也是有類似的情形。換言之，對於隔震建築物與土壤互制的問題固然有學者投入研究[28]，但對於隔震橋

梁與土壤互制之問題則甚罕見[28,29]。

本文旨在提出一識別過程，以探討考慮土壤－橋梁互制 (Soil-bridge interaction) 下裝置鉛心橡皮支承墊隔震橋梁的動態特性。研究中將以溫克 (Winkler) 「梁在彈性基礎上」之模式，來模擬樁基礎之等值基礎勁度與等值基礎阻尼係數，另由於隔震系統將吸收絕大部分的能量，致使橋柱可以線性系統模擬其動態行為，而隔震系統將以雙線性-遲滯模型模擬其動態特性，此非線性遲滯性可用一個背骨曲線反映其特徵。據此，一個多值的回復力即可轉換為單值函數，如此將可使用一般之線性識別方法進行識別分析。本文最後以一三跨隔震橋梁座落於樁基礎上，其在受震下，並以在 5% 噪訊比的白噪訊號來模擬雜訊干擾，並將其加速度反應視為量測資料，進行物理參數系統識別，以驗證本文所建議識別技術之可行性與正確性。

2. 運動方程式

現考慮一個典型的隔震橋梁，如圖 1 所示。上部結構是由剛性的橋面版和線性的橋墩(柱)所組成，其間則藉由鉛心橡皮

支承墊 (LRBs) 來連接，橋梁的基礎為樁基。分析時，一般多假設橋梁位於堅實地盤上，惟實際上橋梁的動力反應因工址的不同而有相當大的差異，所以應考慮基礎與土壤間的互制。圖 1 中，自由度 1~4 為樁帽 1~4 的車軸方向（車行方向）位移，以 $x_{b1} \sim x_{b4}$ 表示，自由度 5~8 為橋柱 1~4 柱頂的車軸方向位移，即 $x_1 \sim x_4$ ，自由度 9 為橋面版的車軸方向位移，表為 x_d 。根據集中質量，其運動方程式可表為

$$\left(\frac{m_j}{2} + m_{bj} \right) \ddot{x}_{bj} + D_j(\dot{x}_{bj}, x_{bj}) - R_j(\dot{x}_j - \dot{x}_{bj}, x_j - x_{bj}) = - \left(\frac{m_j}{2} + m_{bj} \right) \ddot{x}_g \quad (1)$$

$$j = 1 \sim 4$$

$$\frac{m_j}{2} \ddot{x}_j + R_j(\dot{x}_j - \dot{x}_{bj}, x_j - x_{bj}) - r_j(\dot{x}_d - \dot{x}_j, x_d - x_j) = - \frac{m_j}{2} \ddot{x}_g \quad (2)$$

$$j = 1 \sim 4$$

$$m_d \ddot{x}_d + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -m_d \ddot{x}_g \quad (3)$$

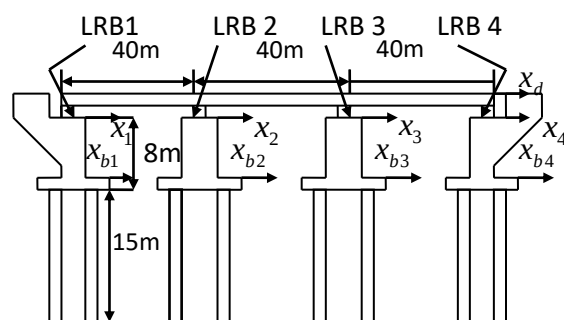


圖 1 考慮土壤-橋梁互制下

隔震橋梁示意圖

此處， m_{bj} ， x_{bj} 和 D_j 分別為第 j 個樁帽的質量，位移與回復力， m_j ， x_j 和 R_j 分別為第 j 個橋柱的質量，位移與回復力， m_d 和 x_d 分別代表橋面版的質量與位移，而 r_j 則是第 j 個 LRB 的非線性回復力。此外，各式中的 $\ddot{x}_g$ 為地表加速度。因樁基礎與橋柱都假設其具有線性行為，所以其回復力可改寫成

$$D_j(\dot{x}_{bj}, x_{bj}) = C_{bj}\dot{x}_{bj} + K_{bj}x_{bj} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} R_j(\dot{x}_j - \dot{x}_{bj}, x_j - x_{bj}) = \\ C_j(\dot{x}_j - \dot{x}_{bj}) + K_j(x_j - x_{bj}) \end{aligned} \quad (5)$$

此處， C_{bj} 與 K_{bj} 分別表示第 j 個樁帽上等值基礎阻尼係數和等值基礎勁度。 C_{bj} 由幅射阻尼和材料阻尼所組成。至於， C_j 和 K_j 則為第 j 個橋柱的阻尼係數和勁度，而 r_j 則為第 j 個 LRB 的非線性回復力函數，可寫成

$$r_j = c_j(\dot{x}_d - \dot{x}_j) + f_j(x_d - x_j) \quad (6)$$

此處， c_j 是線性黏性阻尼 (Viscous damping)，而 f_j 則是一個非線性函數。此非線性函數將於第 4 節詳述之。

3. 等值基礎勁度與等值基礎阻尼

係數

橋梁基礎大都採用樁基礎，而本文以「溫克模式」模擬其動力行為。基樁周圍的土壤可視為一系列之彈簧且具有阻尼性。理論上土壤彈簧係均佈作用於土壤與基樁的界面，宜以有限元素法進行數值分析。分析時，將上下兩元素各一半範圍的土壤反力集中作用於元素間的結點上，此結點上的水平土壤彈簧常數可計算如下

$$K_h = k_h A_h \quad (7)$$

此處， A_h 為水平土壤彈簧有效作用面積。 A_h 之計算如為

$$A_h = b \left(\frac{l_{i-1}}{2} + \frac{l_i}{2} \right) = \frac{1}{2} (l_{i-1} + l_i) \quad (8)$$

其中， l_{i-1} 為上一結點至此結點之長度， l_i 為此結點至下一結點之長度， b 為基樁之直徑。

由於假設水平向的基礎彈簧等值作用在樁帽上，故可利用柏克萊大學所發展出的 CLASS 程式再經修改後之 CLASS4 進行分析。我們在樁帽上方中心點施以一單位水平力，其位移量即為樁帽的柔度係數，再反求作用在樁帽上的等值基礎勁度， K_b 。基樁與土壤於動力互制效應中的消能機制係源於材料阻尼與幅射阻尼。此二者又分別稱為遲滯阻尼與幾何阻尼[30, 31]。當基樁受振時與周圍土壤產生互動，於接觸面產生應力波而向外幅射擴散時，即帶離一些能量藉由基礎傳導至土壤，此種消能方式稱為幅射阻尼。若振動波經過土壤時能量是藉由土壤的遲滯效應而消散的方式則稱為材料阻尼。故幅射阻尼是與樁-土壤間邊界波傳的幅射現象有關，而材料阻尼主要與土壤之有效剪力應變(Effective shear strain)有關。現有文獻中有關土壤材料阻尼的資料相當有限，其來源通常是由一些小型的現場實驗或由理論推導而

得。依據 Seed 等人的研究，材料阻尼係數 c_m 與材料阻尼比 β 具有下列關係[32, 33]

$$c_m \approx 2k(z) \frac{\beta}{\omega} \quad (9)$$

其中， $k(z)$ 為深度 z 處的勁度係數， ω 為外力圓頻率。勁度係數 $k(z)$ 與土壤楊氏模數(Young's modulus) $E_s(z)$ 具有下列關係：

$$k(z) = \delta E_s(z) \quad (10)$$

其中， δ 值可由文獻求得[34]，而 $E_s(z)$ 則可由下式求得：

$$E_s = 2\rho V_s^2(1+\nu) \quad (11)$$

此處， ρ 為土層密度， V_s 為剪力波速而 ν 則為土壤柏松比(Poisson's ratio)。此外，材料阻尼比 β 與有效剪應變 $\gamma_e(z)$ 具有相關性[34]。最後此採用 Kagawa 與 Kraft 所推導而得的關係式，得

$$\gamma_e(z) \approx \frac{1+\nu}{2.5b} y_s(z) \quad (12)$$

其中， b 為基樁直徑， $y_s(z)$ 為樁頂受力後樁的變形曲線， ν 為土壤柏松比。

基樁與土壤互制系統受振時，其波傳方向以水平向為主。且在互制作用中某一深度的土壤反力與其他深度之土壤變位幾無相關，所以，採用平面應變條件下的幅射阻尼理論來求解基樁的幅射阻尼係數，是相當合理的。土壤之橫向幅射阻尼係數可由下式求得

$$c_r = 2b\rho V_s \left\{ 1 + \left[\frac{3.4}{\pi(1-\nu)} \right]^{5/4} \right\} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{3/4} \left(\frac{\pi f b}{V_s} \right)^{-1/4} \quad (13)$$

其中 f 為外力振動頻率。在接近地表時，振波多以表面波形式 (Surface type waves) 傳遞，其傳遞速度相近於剪力波速 V_s ，而非 V_{La} (Lysmer's analog wave velocity)。故在深度小於五倍樁半徑處，需將(13)式修正為

$$c_r \approx 4b\rho V_s \left(\frac{\pi}{4} \right)^{3/4} \left(\frac{\pi f b}{V_s} \right)^{-1/4} \quad (14)$$

因此，樁帽處等值基礎阻尼係數 C_b 可由能量守恆關係求得，即

$$C_b = \int_0^L (c_m + c_r) \gamma_s^2(z) dz \quad (15)$$

其中， $\gamma_s(z)$ 為以樁頭變位正規化後的基樁變形曲線， $\gamma_s(z) = y_s(z) / y_s(0)$ ，而 $y_s(0)$ 為樁頭之靜態位移。惟為考慮土壤-結構互制作用， C_b 將作修正。至於樁帽上等值基礎阻尼比 $\xi_b = \xi_b(f)$ 則可表為：

$$\xi_b(f) = \frac{\omega(f)}{2K(f)} = \frac{\pi f C(f)}{K(f)} \quad (16)$$

其中 $K(f)$ 為動態等值樁帽勁度係數。 $K(f)$ 雖與頻率有關，但基樁受側向力作用時，外力頻率之改變並未對動態勁度造成明顯影響[34]，故可用靜態勁度係數，即 K_b ，取代動態勁度係數，而得到合理的近似解。

3. 遲滯-雙線性模式

第 2 節中函數 r_j ，是一非線性函數，其

模型具有遲滯行為。通常在遲滯模型中，除反轉點外，所有的遲滯路徑都是圓滑的曲線。目前有許多模型皆希望能正確地描寫遲滯行為，而他們主要的概念都是利用背骨曲線(Backbone curve)來描寫遲滯路徑。然而，在穩態的反覆載重下，遲滯模型一般可用 Masing [35] 準則來加以適當地描述。而 Masing 認為，任一遲滯行為的加載與解壓部份，具有相同形狀，且可由背骨曲線之反轉點視為原點再作尺度的兩倍調整而得。故 Masing 準則，可將原為多值函數之回復力，轉換成單值函數，以利後續之識別分析。據此，上述之非線性函數 r_j 可表為

$$r_j(x_d^i - x_j^i) = r_j(x_d^I - x_j^I) + 2f_j \left[\frac{(x_d^i - x_j^i) - (x_d^I - x_j^I)}{2} \right] \quad (17)$$

其中，上標 I 表從開始到最近一次載重或解壓所歷時間，而 x_d^i 則表橋面版在 i 瞬時的位移； $i=I, I+1, \dots$ ，而 $f_j(\bullet)$ 表第 j 個 LRBs 的背骨曲線方程式。現將 (3)、(4) 式和 (5) 式代入 (1) 式，則控制方程式在

i 瞬間可表成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_j\ddot{x}_j + C_j(\dot{x}_j^i - \dot{x}_{bj}^i) + K_j(x_j^i - x_{bj}^i) \\ & - c_j(\dot{x}_d^i - \dot{x}_j^i) - r_j(x_d^I - x_j^I) \\ & - 2f_j \left[\frac{(x_d^i - x_j^i) - (x_d^I - x_j^I)}{2} \right] = -\frac{1}{2}m_j\ddot{x}_g^i \end{aligned} \quad (18)$$

現今瞬間 $i=I$ ，則上式可改寫成

$$\begin{aligned} r_j(x_d^I - x_j^I) &= \frac{1}{2}m_j\ddot{x}_j^I + C_j(\dot{x}_j^I - \dot{x}_{bj}^I) \\ &+ K_j(x_j^I - x_{bj}^I) - c_j(\dot{x}_d^I - \dot{x}_j^I) + \frac{1}{2}m_j\ddot{x}_g^I \end{aligned} \quad (19)$$

再將 (19) 式代入 (18) 式，可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_j(\ddot{x}_j^i - \ddot{x}_j^I) + C_j \left[\begin{aligned} & (\dot{x}_j^i - \dot{x}_{bj}^i) \\ & - (\dot{x}_j^I - \dot{x}_{bj}^I) \end{aligned} \right] + \\ & K_j \left[\begin{aligned} & (x_j^i - x_{bj}^i) \\ & - (x_j^I - x_{bj}^I) \end{aligned} \right] + c_j \left[\begin{aligned} & (\dot{x}_j^i - \dot{x}_d^i) \\ & - (\dot{x}_j^I - \dot{x}_d^I) \end{aligned} \right] \\ & + 2f_j \left[\frac{(x_j^i - x_d^i) - (x_j^I - x_d^I)}{2} \right] \\ & = -\frac{1}{2}m_j(\ddot{x}_g^i - \ddot{x}_g^I) \end{aligned} \quad (20)$$

而後，將 $-\frac{1}{2}m_j(\ddot{x}_d^i - \ddot{x}_d^I)$ 加入 (20) 式的兩邊，可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}m_j[(\ddot{x}_j^i - \ddot{x}_d^i) - (\ddot{x}_j^I - \ddot{x}_d^I)] + \\
 & C_j \begin{bmatrix} (\dot{x}_j^i - \dot{x}_{bj}^i) \\ -(\dot{x}_j^I - \dot{x}_{bj}^I) \end{bmatrix} + K_j \begin{bmatrix} (x_j^i - x_{bj}^i) \\ -(x_j^I - x_{bj}^I) \end{bmatrix} \\
 & + c_j \begin{bmatrix} (\dot{x}_j^i - \dot{x}_d^i) \\ -(\dot{x}_j^I - \dot{x}_d^I) \end{bmatrix} \\
 & + f_j \left[\frac{(x_j^i - x_d^i) - (x_j^I - x_d^I)}{2} \right] = \\
 & -\frac{1}{2}m_j(\ddot{x}_g^i - \ddot{x}_g^I) - \frac{1}{2}m_j(\ddot{x}_d^i - \ddot{x}_d^I)
 \end{aligned} \quad (21)$$

再令

$$u_j^i = (x_j^i - x_d^i) - (x_j^I - x_d^I) \quad (22)$$

則 (21) 式可改寫成

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_j^i + \frac{2c_j}{m_j}\dot{u}_j^i + \frac{4f_j\left(\frac{u_j^i}{2}\right)}{m_j} = & -(\ddot{x}_g^i - \ddot{x}_g^I) \\
 & -(\ddot{x}_d^i - \ddot{x}_d^I) - 2C_j \begin{bmatrix} (\dot{x}_j^i - \dot{x}_{bj}^i) \\ -(\dot{x}_j^I - \dot{x}_{bj}^I) \end{bmatrix} / m_j \\
 & - 2K_j \begin{bmatrix} (x_j^i - x_{bj}^i) \\ -(x_j^I - x_{bj}^I) \end{bmatrix} / m_j
 \end{aligned} \quad (23)$$

另理想化的背骨曲線，一般可用雙線性模型取代。雙線性模型是由兩條不同斜率的線段連接而成，其一線段之斜率為 k_{je} ，表雙線性模型中的初始勁度，而另一線段之

斜率為 k_{jy} ，則表降伏後之勁度，表為

$$\begin{aligned}
 f_j(v) &= k_{je}v & -D \leq v \leq D \\
 &= b_j + k_{jy}v & v > D \\
 &= -b_j + k_{jy}v & v < -D
 \end{aligned} \quad (24)$$

此處， D 表降伏位移，而 b_j 則為第 j 個 LRB 的固有降伏強度(Characteristic strength)。

最後，將(24)式代入(23)式，且此時 (23) 式之右方諸項可用 $\ddot{u}_{jg}^i$ 表示，則可推得

$$\ddot{u}_j^i + \frac{2c_j}{m_j}\dot{u}_j^i + \frac{2k_{je}}{m_j}u_j^i = \ddot{u}_{jg}^i, -D \leq u_j \leq D \quad (25)$$

$$\ddot{u}_j^i + \frac{2c_j}{m_j}\dot{u}_j^i + \frac{4b_j}{m_j} + \frac{2k_{jy}}{m_j}u_j^i = \ddot{u}_{jg}^i, u_j > D \quad (26)$$

$$\ddot{u}_j^i + \frac{2c_j}{m_j}\dot{u}_j^i - \frac{4b_j}{m_j} + \frac{2k_{jy}}{m_j}u_j^i = \ddot{u}_{jg}^i, u_j < -D \quad (27)$$

(25)~(27)式，為上部結構的識別方程式。

同理，將 (4)、(5)式代入(1)式，可得下部結構的識別方程式為

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_{bj} + \frac{C_{bj}}{(m_j/2 + m_{bj})} \dot{x}_{bj} + \\ & \frac{K_{bj}}{(m_j/2 + m_{bj})} x_{bj} = -\ddot{x}_g + \\ & \frac{C_j}{(m_j/2 + m_{bj})} (\dot{x}_j - \dot{x}_{bj}) + \\ & \frac{K_j}{(m_j/2 + m_{bj})} (x_j - c_{bj}) \end{aligned} \quad (28)$$

集合。此時參數 c_j 和 k_{je} 可經由求解下式而得

$$\frac{\partial e_1}{\partial (2c_j/m_j)} = 0, \quad \frac{\partial e_1}{\partial (2k_{je}/m_j)} = 0 \quad (30)$$

相同地，可定義第二部份的誤差值 e_2 為

4.物理參數識別

許多系統識別的方法，都是使用傳統的輸出誤差法 (Output-error method) [36]，其是利用輸出值與理論值間的最小化，以決定結構參數的一種技巧。本文亦使用此一技巧。當橋面版、橋柱與樁帽處的反應可量測而得時，則可利用上述方法來加以識別出系統的參數，另橋體之質量，一般不會受到施工之影響，故可假設為已知。現首先定義第一部份的誤差值 e_1 為

$$e_1 = \sum_{i=1} [\ddot{u}_j^i + \frac{2c_j}{m_j} \dot{u}_j^i + \frac{2k_{je}}{m_j} u_j^i - \ddot{u}_{jg}^i]^2 \quad (29)$$

其中，上標 i 代表 $-D \leq u_j \leq D$ 之所有點的

$$\begin{aligned} e_2 = \sum_{k=1} [\ddot{u}_j^k + \frac{2c_j}{m_j} \dot{u}_j^k \\ + \frac{4b_j}{m_j} + \frac{2k_{jy}}{m_j} u_j^k - \ddot{u}_{jg}^k]^2 \end{aligned} \quad (31)$$

其中，上標 k 代表 $u_j > D$ 所有點的集合，由

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_2}{\partial (2c_j/m_j)} = 0, \quad \frac{\partial e_2}{\partial (4b_j/m_j)} = 0 \\ , \quad \frac{\partial e_2}{\partial (2k_{jy}/m_j)} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

可求得一組 c_j ， b_j 與 k_{jy} 之值。最後，再定義第三部份的誤差值 e_3 ，如下

$$\begin{aligned} e_3 = \sum_{l=1} [\ddot{u}_j^l + \frac{2c_j}{m_j} \dot{u}_j^l \\ + \frac{4b_j}{m_j} + \frac{2k_{jy}}{m_j} u_j^l - \ddot{u}_{jg}^l]^2 \end{aligned} \quad (33)$$

5. 數值範例

其中，上標 l 代表 $u_j < -D$ 所有點的集合。

再由

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{a}_3}{\partial (2c_j / m_j)} &= 0, \quad \frac{\partial \hat{a}_3}{\partial (4b_j / m_j)} = 0 \\ , \quad \frac{\partial \hat{a}_3}{\partial (2k_{jy} / m_j)} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

可求得另一組 c_j ， b_j 和 k_{jy} 。然而，此時參數值並非唯一，取其平均。今再定義一總誤差值 e 為

$$e = e_1 + e_2 + e_3 \quad (35)$$

而橋柱的最佳參數值 C_j ， K_j 與 LRBs 的最佳參數值 c_j ， b_j ， k_{je} 和 k_{jy} ，就是依總誤差值 e 的最小化過程所尋得。

為了比較識別結果的精度，今再定義另一誤差指數 EI 為

$$EI = \left\{ \frac{\int_0^t [(\ddot{x}_j)_r - (\ddot{x}_j)_t]^2 dt}{\int_0^t [(\ddot{x}_j)_r]^2 dt} \right\}^{1/2} \quad (36)$$

此處， $(\ddot{x}_j)_r$ 表量測而得的加速度反應，其中下標 j 表示第 j 個橋柱，若將 j 改成 d 則表示橋面版的加速度反應。而 $(\ddot{x}_j)_t$ 則是識別所得的加速度反應。

圖 2 所示的樁基礎係一群樁，其樁帽為剛性，長、寬與高分別為 6m、6m 與 0.5m。5 根單樁樁徑同為 0.5m，樁長 15m。樁帽附近採用較小的元素以得到較佳的結果，即樁帽下 0~1m 處，各單樁分為 5 個元素，每個元素長 0.2m。在 1~5m 處分為 8 個元素，每個元素 0.5m，而 5m 以下則分為 10 個元素，每一元素 1m。至於土層資料，如圖 3 所示。

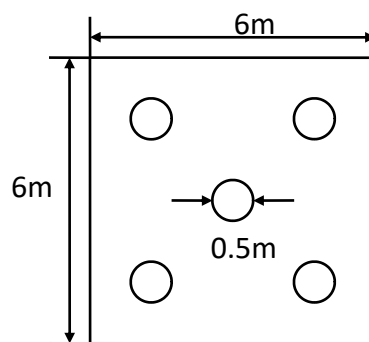


圖 2 樁基礎示意圖

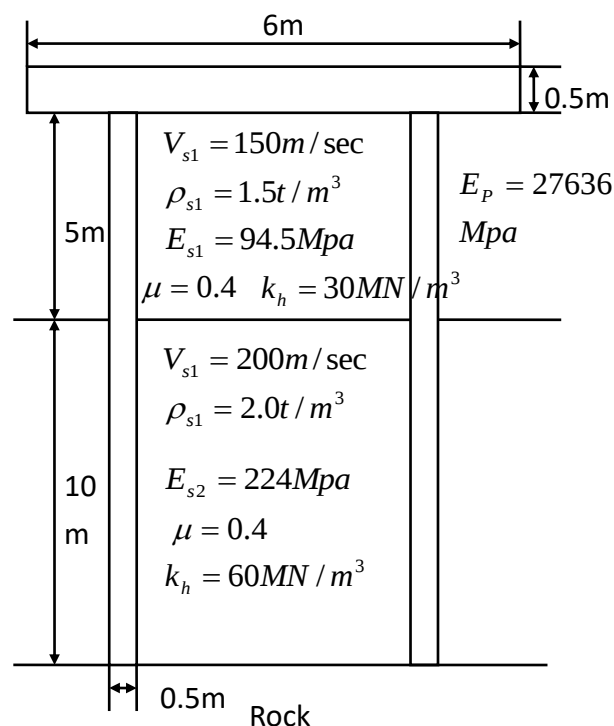


圖 3 樁基礎土層資料

單樁上的水平彈簧常數經由 (7)、(8) 式計算而得。再利用 CLASS4 進行分析，則樁帽上水平向的等值基礎勁度即可求得。據此，當考慮群樁時，等值基礎勁度為： $236965 \text{ kN} / \text{m}$ 。

本文假設鋼筋混凝土結構之阻尼比為：0.05 而 LRB 之阻尼比為：0.07。其他所使用的數值資料如下：

$$\begin{aligned} m_{b1} &= m_{b2} = m_{b3} = m_{b4} = 43.2 \times 10^3 \text{ kg} , \\ \frac{1}{2} m_1 &= \frac{1}{2} m_4 = 76.8 \times 10^3 \text{ kg} , \\ \frac{1}{2} m_2 &= \frac{1}{2} m_3 = 38.4 \times 10^3 \text{ kg} ; \\ K_{b1} &= K_{b2} = K_{b3} = K_{b4} = 236.97 \text{ MN} / \text{m} , \\ K_1 &= K_4 = 431.8 \text{ MN} / \text{m} , \\ K_2 &= K_3 = 215.9 \text{ MN} / \text{m} , \\ k_{1e} &= k_{4e} = 47.04 \text{ MN} / \text{m} , \\ k_{1y} &= k_{4y} = 7.056 \text{ MN} / \text{m} , \\ k_{2e} &= k_{3e} = 55.86 \text{ MN} / \text{m} , \\ k_{2y} &= k_{3y} = 8.526 \text{ MN} / \text{m} , \\ b_1 &= b_4 = 588 \text{ kN} , b_2 = b_3 = 705.6 \text{ kN} 。 \end{aligned}$$

樁帽之等值阻尼比可由 (9)~(6) 式算出， $\xi_b = 0.121 + 0.064 f^{3/4}$ 。最後計算出各阻尼係數值如下：

$$C_{b1} = C_{b2} = C_{b3} = C_{b4} = 451 \text{ kN.s} / \text{m} ,$$

$$\begin{aligned} C_1 &= C_4 = 475 \text{ kN.s} / \text{m} , \\ C_2 &= C_3 = 237 \text{ kN.s} / \text{m} , \\ c_1 &= c_4 = 52 \text{ kN.s} / \text{m} , \\ c_2 &= c_3 = 61 \text{ kN.s} / \text{m} 。 \end{aligned}$$

本文利用 Newmark 線性加速度法，並以發生於 1940 年的 El Centro N-S 向之地表加速度為輸入歷時，且考慮在 5% 噪訊比的白噪訊干擾下之加速反應，以更真實地模擬量測資料，而後將所求得各自由度之反應視為量測資料，進行物理參數識別。

識別一開始，是將 C_1 值假設為零，而 K_1 值逐步增加，其總誤差值 e 與 K_1 間之關係變化圖，如圖 4 所示。由圖可知經由誤差最小化過程，尋得最佳之 $K_1 = 450.0 \text{ MN} / \text{m}$ 。而後，將 K_1 值固定於此值，而 C_1 值逐步增加，其總誤差值 e 與 C_1 的最小化變化關係圖，如圖 5 所示。由圖中最佳之 C_1 值為： $550 \text{ kN.s} / \text{m}$ 。而 LRB1 的最佳參數值，經第一次循環亦可尋得為： $c_1 = 46.9 \text{ kN.s} / \text{m}$ ， $b_1 = 585.8 \text{ kN}$ ， $k_{1e} = 46.80 \text{ MN} / \text{m}$ 和 $k_{1y} = 7.033 \text{ MN} / \text{m}$ ，當最佳的 C_j 與 K_j 值既已尋得，再將 C_j 與 K_j 值代入 (28) 式，再經由識別過程，則可尋得最佳的等值基礎阻尼係數 C_{bj} 與等值基

礎勁度 K_{bj} 。吾人稱此為完成一次循環。至於循環次數的多寡則視參數的收斂性而定。第二次循環時，則將 C_1 故定為 $550kN.s/m$ ，而 K_1 值再次逐步增加(此時循環 K_1 值的逐步增值取第一次循環增值的十分之一)，同樣地，經由誤差最小化的過程，可尋得第二次循環的最佳 K_1 值為 $430.0MN/m$ ，如圖 6 所示。由數值結果顯示經過三次循環其收斂情形便已相當良好。

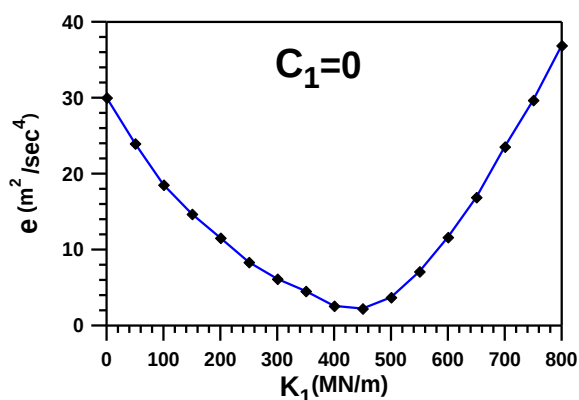


圖 4 第一次循環之總誤差當 $C_1 = 0kN.s/m$

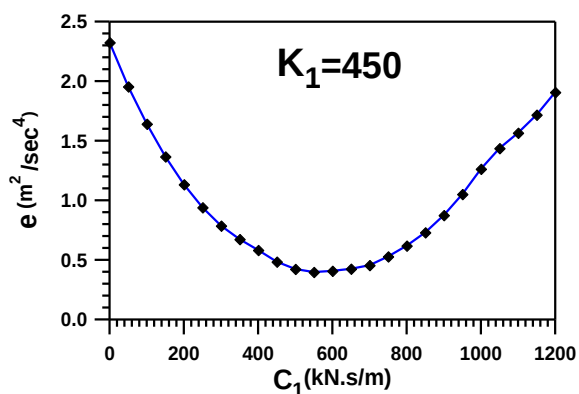


圖 5 第一次循環之總誤差當

$$K_1 = 450MN/m$$

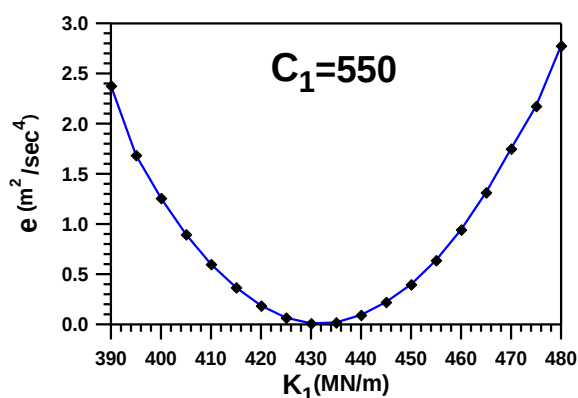


圖 6 第二次循環之總誤差當

$$C_1 = 550kN.s/m$$

內橋柱（橋柱 2），之識別過程，可依橋柱 1 之識別過程重複進行，經三次循環後，亦可尋得橋柱 2 之最佳物理參數。表 1 中第 2~3 行分別表橋柱 1 在每次循環中所尋得之最佳 C_1 與 K_1 值，第 5~6 行則分別表示樁帽 1 在每次循環中所尋得之最佳 C_{b1} 與 K_{b1} 值，而第 7~10 行則為 LRB1 之 c_1 ， b_1 ， k_{1e} 與 k_{1y} 在每次循環中所尋得之最佳識別值。由表 1 可知識別結果相當良好。表 2 中第 2~3 行分別表示橋柱 2 之 C_2 與 K_2 ，於每次循環中所尋得之最佳識別值，第 5~6 行則分別表示樁帽 2 在每次循環中所尋得之最佳 C_{b2} 與 K_{b2} 值，而第 7~10 行則為 LRB2 在每次循環中所尋得之最佳 c_2 ， b_2 ， k_{2e} 與 k_{2y} 值。由表 2 可知

識別結果亦相當令人滿意。

表 1 橋柱 1、樁帽 1 與支承墊 1
之參數識別值

1	2	3	
循 環 次 數	C_1 $kN.s/m$	K_1 MN/m	
1	550	450.0	
2	545	430.0	
3	547	431.3	
正確值	554	431.8	
誤差指數	0.45219		
4	5	6	
循 環 次 數	C_{b1} $kN.s/m$	K_{b1} MN/m	
1	439	235.96	
2	441	236.24	
3	442	236.47	
正確值	451	236.97	
誤差指數	0.46644		
7	8	9	10
c_1 $kn.s/m$	b_1 kN	k_{1e} MN/m	k_{1y} MN/m
46.9	585.8	46.80	7.033

47.4	586.9	46.91	7.048
48.7	587.1	46.96	7.051
52.0	588.0	47.04	7.056
0.25214			

表 2 橋柱 2、樁帽 2 與支承墊 2
之參數識別值

1	2	3	
循 環 次 數	C_2 $kN.s/m$	K_2 MN/m	
1	250	210.0	
2	249	215.0	
3	248	215.1	
正確值	237	215.9	
誤差指數	0.56251		
4	5	6	
循 環 次 數	C_{b2} $kN.s/m$	K_{b2} MN/m	
1	438	235.87	
2	439	236.39	
3	443	236.53	
正確值	451	236.97	
誤差指數	0.58496		
7	8	9	10

c_2 $kn.s/m$	b_2 kN	k_{2e} MN/m	k_{2y} MN/m
57.2	691.2	54.39	8.386
59.5	699.1	55.68	8.497
60.3	700.9	55.79	8.508
61.0	705.6	55.86	8.526
0.25214			

進一步地，藉由識別反應與量測者的比較可顯示本文所建議識別方法的正確性與有效性。圖 7 與 8 為樁帽 1 之加速度與位移反應的識別與量測值比較圖，由圖可知識別結果良好。圖 7 與 8 為樁帽 1 之加速度與位移反應的識別與量測值比較圖，由圖可知識別結果良好。圖 9 與 10 比較樁帽 2 識別值與量測值之加速度與位移反應，其結果亦良好。進一步再比較橋柱 1 之加速度與位移反應，其結果令人滿意，如圖 11 與 12 所示，而圖 13 與 14 則為橋柱 2 之加速度與位移反應，其結果亦令人滿意。最後，圖 15 與 16 為橋面版加速度與位移反應的識別值與量測值比較圖，其結果亦相當良好。如此可知本文所建議之識別方法，於白噪訊干擾下亦可有效且正確

地識別出考慮橋梁-土壤互制下隔震橋梁的物理參數，故可證明本文所提出之識別方法對於考慮橋梁-土壤互制與噪訊影響下隔震橋梁物理參數識別的可行性。

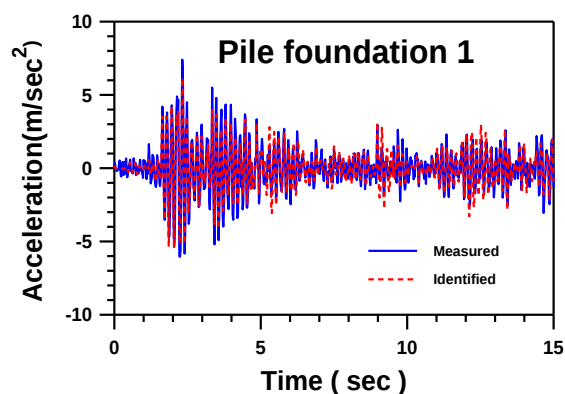


圖 7 樁帽 1 量測與識別之加速度比較

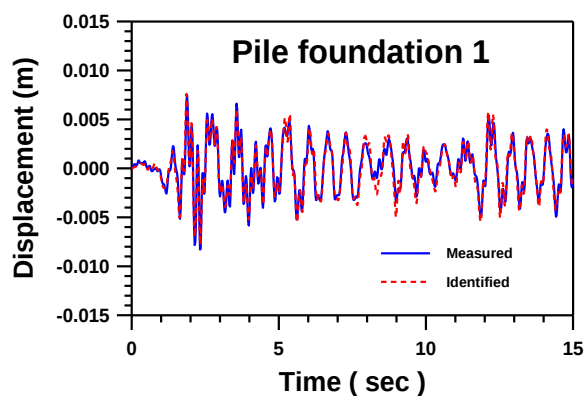


圖 8 樁帽 1 量測與識別之位移比較

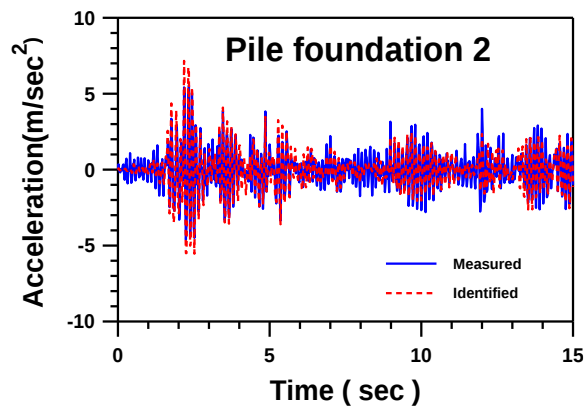


圖 9 樁帽 2 量測與識別之加速度比較

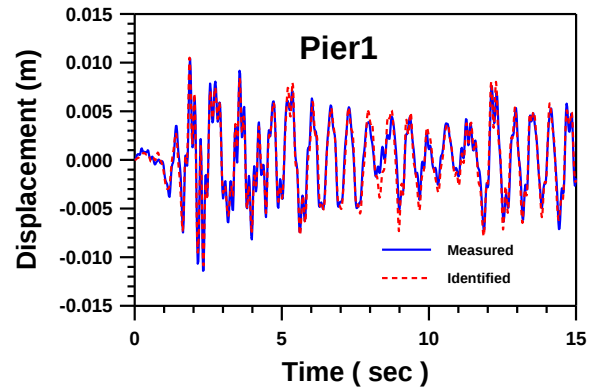


圖 12 橋柱 1 量測與識別之位移比較

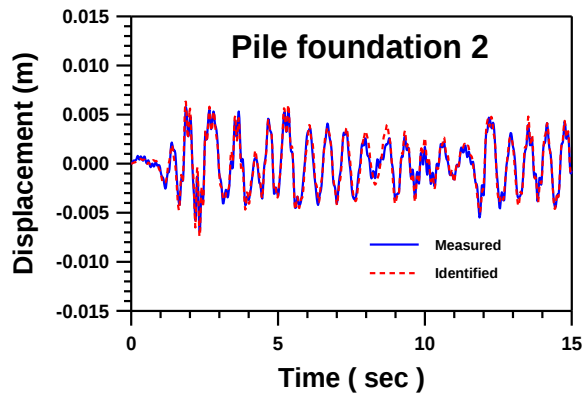


圖 10 樁帽 2 量測與識別之位移比較

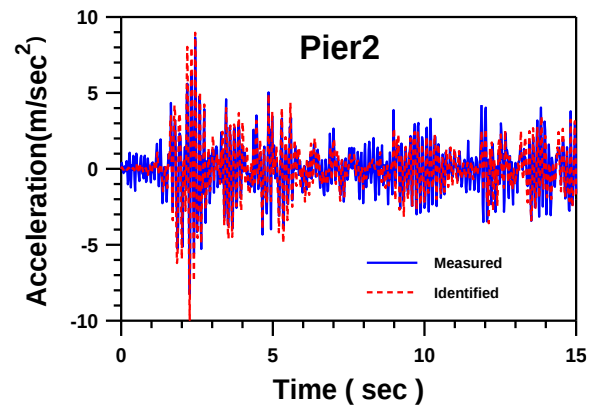


圖 13 橋柱 2 量測與識別之加速度比較

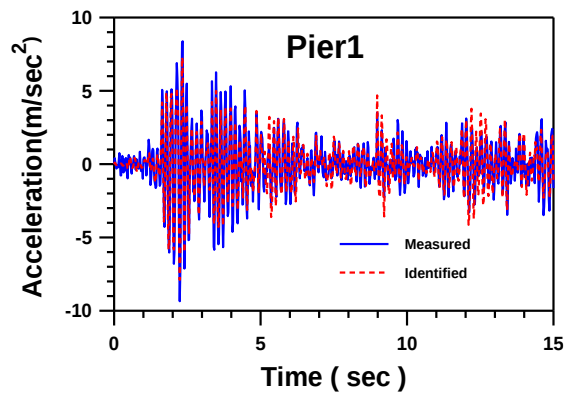


圖 11 橋柱 1 量測與識別之加速度比較

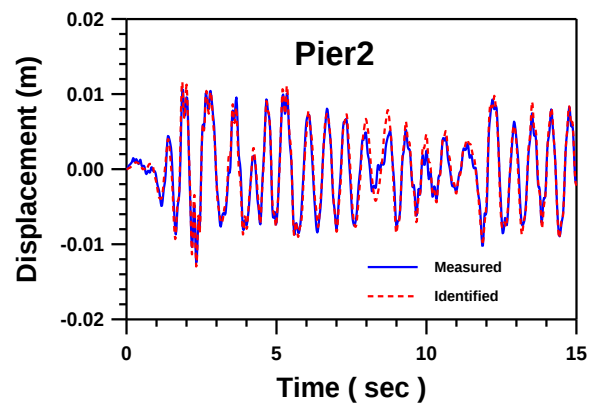


圖 14 橋柱 2 量測與識別之位移比較

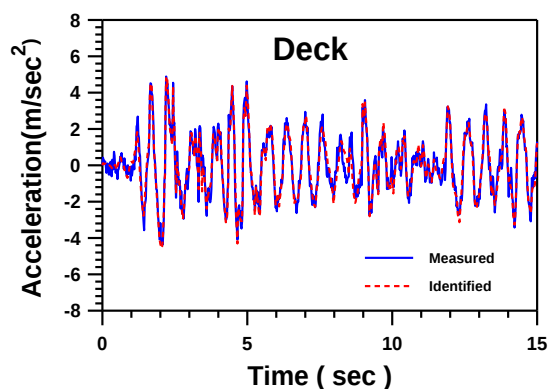


圖 15 橋面版量測與識別之加速度比較

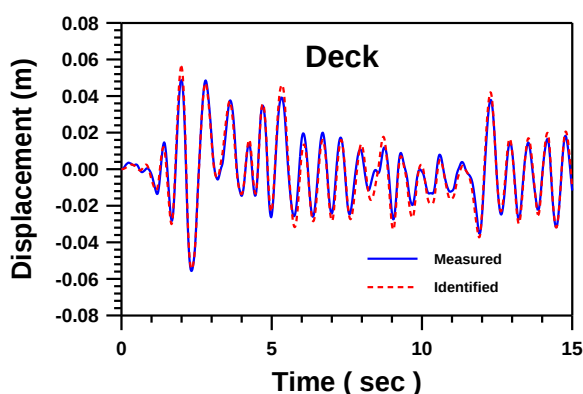


圖 16 橋面版量測與識別之位移比較

6. 結論

本文提出一種識別的過程以求得考慮土壤-橋梁互制下隔震橋梁的物理動力參數。文中考慮在 5% 噪訊比的白噪訊號干擾下的加速度反應，以期能更真實的模擬實測資料。研究中，由於隔震系統將吸收絕大部分的能量，故橋柱可視為線性系統，而樁基礎之分析，將以溫克「梁在彈性基礎上」之模式，來模擬樁基礎之等值基礎勁度與等值基礎阻尼係數，另隔震系統則

將以雙線性-遲滯模型模擬其動態行為，此非線性遲滯性可用一個背骨曲線以反映其特徵。據此，一個多值的回復力即可轉換為單值函數，如此將可使用一般之線性識別方法進行識別分析。數值範例分析結果顯示，考慮土壤-橋梁互制與噪訊影響下隔震橋梁的識別反應與量測資料甚為接近，證明本文所建議之識別方法使用在位於樁基礎上具部分非線性行為隔震橋梁的可行性與正確性。

7. 參考文獻

1. A. Ghobarah and H. M. Ali , “Seismic design of base isolation highway bridges utilizing lead-rubber bearing” *Can. J. Civ. Eng.*, Vol.17, pp.413-422,1990.
2. R. L. Mayes, I. G. Buckle, T. E. Kelly and L. R. Jones, “AASHTO seismic isolation design requirements for highway bridge”, *Journal of Structural Engineering*, Vol.118, No.1, pp.285-304, 1992.
3. J. M. Kelly, “A seismic base isolation: review and bibliography,” *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.5, No.3, pp.202-217, 1986.
4. R. S. Jangid and J. M. Kelly, “Base isolation for near fault motions,” *Earthquake Engineering and Structural*

- Dynamics*, Vol.30, No.5, pp.691-707, 2001
5. R. I. Shinner, W. H. Robinson and G. H. McVerry, "An introduction to seismic isolation," Wiley, New York, 1993
6. H. N. Li and X. X. Wu, "Limitations of height-to-width ratio for base-isolated buildings under earthquake," *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, Vol.15, pp.277-287, 2006.
7. Z. K Lee., T. H. Wu and C. H. Lo, "System identification on the seismic behavior of an isolated bridge," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vo.32, pp.1797-1812, 2003.
8. B. N. Robson and I. E. Hark, "Pullback testing of seismically isolated pc i-girder bridge", *Journal of Structural Engineering* (ASCE), Aug., 1998.
9. G. H McVerry, "Structural identification in the frequency domain from earthquake records", *Int. J. of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.8, pp.161-180, 1980.
10. J. L.Beck, and P. C. Jennings, "Structural identification using linear models and earthquake records", *Int. J. of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.8, pp.145-160, 1980.
11. C. Y. Peng, "Generalized model identification of linear and nonlinear dynamic systems", Report, No.EERL 87-05, Caltech, 1987.
12. F. E. Udwadia and C. P. Kuo, "Non-parametric identification of a class of nonlinear close coupled dynamic system", *Int. J. of Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol.9, pp.385-402, 1981.
13. S. F. Masri et al., "Non-parametric identification of a class of nonlinear multi-degree dynamic system", *Int. J. of Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol.10, pp.1-30, 1982.
14. M. Hoshiya, and E. Saito, "Structural identification by extended Kalman filter," *Journal of the Engineering Mechanics Division* (ASCE), Vol. 110, No. 12, pp. 1757-1770, 1984.
15. R. Y. Tan and W. M. Chen," An iterative identification algorithm for linear dynamic system," *Proceedings of the national Science Council Part A: Physical Science and Engineering*, Vol. 16, No.1, pp. 23-31, 1992.
16. R. Y. Tan and W. M. Chen," System identification of a non-classically damped linear system," *Int. J. Computers and Structures*, Vol. 46, No. 1, pp.67-75, 1993.
17. M. T. A. Chaudhary, M. Abe, Y. Fujino, and J. Yoshida, "System identification of two base-isolated bridge using seismic records," *Journal of Structural*

- Engineering*, Vol.126, No.10, pp.1187-1195, 2000.
18. T. Furukawa, M. Ito, and Y. Inoue, "System identification of base isolated structure by prediction error method using recorded seismic response data under Hyogoken-Nanbu earthquake," *Proc., 12th World Conf. on Earthquake Engineering*, New Zealand National Society for earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, No.432. 2000.
 19. T. Furukawa, M. Ito, K. Izawa, and M. N. Noori, "System identification of base-isolated building using seismic response data," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 131. No. 3, pp.268-275, 2005.
 20. C. H. Loh, J. H. Weng, C. H. Chen, and K. C. Lu, "System identification of mid-story isolation building using both ambient and earthquake response data," *Structural Control and Health Monitoring*, Vol. 20, pp.139-155, 2013.
 21. C. H. Loh, S. H. Chao, J. H. Weng, and T. H. Wu, "Application of subspace identification technique to long-term seismic response monitoring of structures," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Published online in Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com). DOI: 10.1002/eqe.2475, 2014.
 22. J. Bielak, "Dynamic behaviour of structures with embedded foundations," *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.2, No. 3, pp.259-274, 1975.
 23. J. P. Stewart, G. L. Fenves, and R. B. Seed, "Seismic soil-structure interaction in buildings I: analytical method," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering (ASCE)*, Vol.125, No.1, pp.38-48, 1999.
 24. R. Roy, and S. C. Dutta, "Effect of soil-structure interaction on dynamic behaviour of building frames on isolated footings," *National Symposium on Advances in Structural Dynamics and Design (ASDD)*, Proceedings, Chennai, India, pp.579-586, 2001.
 25. G. Gazetas, "Formulas and charts for impedances of surface and embedded foundations," *Journal of Geotechnical Engineering (ASCE)*, Vol.117, No.9,

- pp.1361-1381, 1991.
26. H. Takemiya and Y. Yamada, "Layered soil-pile-structure dynamic interaction", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.9, pp.437-458, 1981.
 27. M. C. Constantinou, "A simplified analysis procedure for base-isolated structures on flexible foundation", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.15, pp.963-983, 1987.
 28. M. Novak and P. Henderson, "Base-isolated buildings with soil-structure interaction", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.18, pp.751-765, 1989.
 29. G. Ghobarah and H. M. Ali, "Seismic performance of highway bridges", *J. Structure Engineering*, ASCE, Vol.10, pp.157-166, 1988.
 30. H. B. Seed and I. M. Idriss, "Soil moduli and damping factors for dynamic response analysis", Report, No. EERC 70-100, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1970.
 31. H. B. Seed, T. W. Robert, I. M. Idriss and K. Tokimatsu, "Moduli and damping factors for dynamic analysis of cohesionless soil", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol.112, No.11, pp.1016-1032, 1986.
 32. G. Gazetas and R. Dobry, "Horizontal response of piles in layered soils", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol.1, pp.20-40, 1984.
 33. T. Kagawa and L. M. Kraft, "Lateral load-deflection relationship of piles subjected to dynamic loadings", *Soil and Foundations*, Vol.20, No.4, pp.19-36, 1980.
 34. T. Kagawa and L. M. Kraft, "Seismic p~y response of flexible piles", *Journal of Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol.106, No.8, pp.899-918, 1980.
 35. P. C. Jennings, "Earthquake response of yielding structure," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.91, pp.41-68, 1965.
 36. M. C. Huang, Y. P. Wang, J. R. Chang, and Y. H. Chen, "Physical-parameter identification of base-isolated buildings using backbone curves," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 135, pp. 1107-1114, 2009.