

以數值模擬探討昆蟲懸停振翅產生升力的關鍵機制

王勵* 伍次寅

國立台灣大學機械工程學系

摘 要

本文主要以數值模擬探討翅膀彈性與旋轉效應對撲翼飛行(flapping-wing flight)之氣動力學的影響。為簡化問題，本研究將流場運動方程式設成二維；再者，由於昆蟲翅膀的厚度可忽略，因此對於二維流場而言昆蟲翅膀可視為一具有彈性的線段。本文利用二維渦流板格法(vortex panel method)求解非穩態流場。為了考量昆蟲翅膀於拍翅時所呈現的大變形姿態，本研究以樑的幾何非線性方程式(geometrically nonlinear equation for bending beams)來模擬昆蟲翅膀的變形，並以適當的演算法進行迭代來求得流固耦合(fluid-structure interaction)模式下的數值解。本研究證實適度的翅膀撓性剛度及翅膀旋轉角速度可有效利用渦流對捕捉效應(vortex-pair capture effect)來提高升力。

關鍵詞：渦流板格法，翅膀撓性剛度，翅膀旋轉，渦流對捕捉

Investigate the Key Mechanism on Lift Production of a Hovering Insect Flight through Numerical Simulation

Li Wang* and Tzuyin Wu

Department of Mechanical Engineering, National Taiwan University

ABSTRACT

In this study, we examine numerically the effect of wing flexibility and wing rotation on the aerodynamic performance of flapping flight. In the present work, a two dimensional computational study of hovering flight by single flapping wing is considered. In the 2-D framework, the wing is treated as an elastic filament. Based on the underlying linear potential flow theory, the principle of aerodynamic superposition is used to deal with the complex aerodynamic configuration. A potential flow 2-D vortex panel method is employed to solve the unsteady hydrodynamic problem of a flapping wing. To account for the large deformation nature of the wing, motion of the filament is modeled by a geometrically nonlinear equation for bending beams. In this paper, we use a proper iterative numerical algorithm to deal with the fluid-structure interaction problem. Present study suggests that the moderate wing flexibility and wing rotation speed can benefit from the vortex-pair capture effect.

Keywords: vortex panel method, wing flexibility, wing rotation, vortex-pair capture

文稿收件日期 110.7.23；文稿修正後接受日期 110.11.14；*通訊作者
Manuscript received July 23, 2021; revised November 4, 2021; *Corresponding author

一、前言

近一世紀以來，昆蟲飛行的奧秘一直是學者專家們亟欲解開的謎團。人類所製造的飛行器，其飛行的靈活度遠遠比不上日常生活中常見的昆蟲。昆蟲是採撲翼飛行，其特別的地方在於翅膀在拍動過程中會持續改變其運動攻角(angle of attack)，當翅面翻轉到一定角度後則會反向拍動，周而復始。因此，撲翼飛行明顯要比固定翼飛行(fixed-wing flight)要來得複雜許多。早期人們在估計昆蟲飛行所產生的升力是採用準定常模式(quasi-steady model)來進行推算，結果發現所得到的升力並不足以支撐昆蟲的重量[1]。因此，科學家們認為昆蟲是利用非穩態流場機制(unsteady-flow mechanism)來產生額外的升力。文獻[2-4]指出昆蟲翅膀在平移加速的過程中所產生的附加質量作用力(added mass force)可增加升力。此外，由於昆蟲翅膀在大部分的拍翅行程中皆處於高攻角(high angle-of-attack)的失速狀態，故易於翅膀前緣處產生前緣渦(leading-edge vortex, LEV)，進而獲得相當高的瞬間升力，此現象稱為動態失速效應(dynamic-stall effect)[3, 5, 6]。除了上述所提到的非穩態機制外，許多文獻亦提到拍翅過程中的翅面翻轉(wing rotation)是昆蟲獲致高升力的重要關鍵因素之一[2, 6, 7]。翅面翻轉可使昆蟲翅膀於下拍及上拍行程中皆能以適當的攻角來獲得向上的升力，同時藉由翅面的旋轉運動也能提高翅膀與流體間的相互作用力。另一個切關昆蟲振翅升力的因素是由Dickinson等人[6]所提出的尾流捕捉效應(wake-capture effect)，所謂的尾流捕捉是指翅膀在反拍的時刻與前一個拍翅行程所引發的尾流(wake)產生作用，此現象可增加翅膀與流體間的作用力。往後，亦有相當多的文獻提到渦流捕捉可有效提高升力[8-10]。

部分文獻[7, 8, 11, 12]將昆蟲翅膀視為剛

體，但實際情況並非如此。翅膀在拍動的每一瞬間因彈性效應的緣故，皆會以不同於剛體的姿態呈現。文獻[13, 14]以高速攝影機拍攝自由飛行的昆蟲，發現昆蟲翅膀的變形主要是展長方向的扭轉及弦長方向的彎矩。Du與Sun[15, 16]將實驗觀測所獲得的翅膀變形量代入數值計算，討論翅膀變形隨時間變化對氣動力學的影響，並將其結果與剛性翅膀相比發現翅膀的彎矩(bending)現象會提高翅膀受到升力及阻力。然而上述研究[15, 16]的翅膀變形皆是經由實驗觀測所給定，並未參與計算。為了同時將翅膀變形與流場間的相互作用納入考量，文獻[17-20]以流固耦合的方式進行研究。Yin與Luo[17]的研究結果顯示無論是因翅膀慣性或外力因素所造成的翅膀變形皆可提高升力，其中前者所造成的翅膀變形還可減低受到的阻力來提升飛行效率。Kang與Shyy[18]藉由調整翅膀物性來探討領先、對稱及延遲旋轉模式下的飛行效率，其研究結果顯示對稱旋轉可獲得最高升力。

本篇論文旨在運用數值法來模擬昆蟲撲翼飛行所產生的流場，並計算翅膀的受力情形。為簡化模擬，本研究將流場視為二維；翅膀則視為一沿弦長方向具彈性的線段，並以樑的幾何非線性方程式[17, 21]來模擬其受力後的彎曲變形。綜合上述流場及彈性固體運動方程式可計算出在流固耦合作用下，彈性線段受到流體所施加的作用力，藉以模擬昆蟲於懸停狀態拍翅所獲得的升力。本研究擬從基本的牛頓力學概念為出發點，配合渦流流場中的流體運動特性來探討不同撓性剛度及翅膀旋轉角速度對升力的影響效應。本研究嘗試理解造成昆蟲翅膀高效益升力的關鍵機制，並整理出簡單的通則，以做為日後設計微型飛行器(MAV)的參考依據。

二、統御方程式

2.1 翅膀拍動模式

本文考慮昆蟲懸停拍翅模式，參照文獻 [17, 22]，翅膀前緣同時具有平移及旋轉運動（見圖 1），其運動方程式如下：

$$X_L(t) = \left(\frac{A_0}{2} \cos(2\pi ft), 0 \right) \quad (1)$$

(1)式為翅膀前緣平移運動方程式，其中 X_L 為翅膀前緣位置向量、 A_0 為翅膀前緣拍動距離、 f 為翅膀拍翅頻率。

(a) $t_{rot} < t < t_{rot} + \Delta t_{rot}$:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{-\Delta\theta}{\Delta t_{rot}} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{2\pi(t - t_{rot})}{\Delta t_{rot}} \right] \right\}$$

(b) $\frac{T_c}{2} + t_{rot} < t < \frac{T_c}{2} + t_{rot} + \Delta t_{rot}$:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\Delta\theta}{\Delta t_{rot}} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{2\pi(t - \frac{T_c}{2} - t_{rot})}{\Delta t_{rot}} \right] \right\}$$

(3)其他：

$$\dot{\theta}(t) = 0 \quad (2)$$

(2)式為翅膀前緣旋轉運動方程式，其中 θ 為前緣角（翅膀前緣與+x軸間的夾角，見圖 1）、 $\dot{\theta}$ 為翅膀前緣的旋轉角速度、 $\Delta\theta$ 為前緣角變化量、 t_{rot} 為翅膀前緣旋轉時機、 Δt_{rot} 為翅膀前緣旋轉行程所花的時間、 T_c 為翅膀拍動一週期所花的時間。關於本文往後所列出的方程式及物理量，除非有特別闡明，否則皆為無因次形式，其參考長度為翅膀弦長 c 、參考速度為翅膀前緣平移最大速度 $U (= A_0 \pi f)$ 、參考時間為 c/U 、參考密度為空氣密度 ρ 、參考壓力為 ρU^2 。

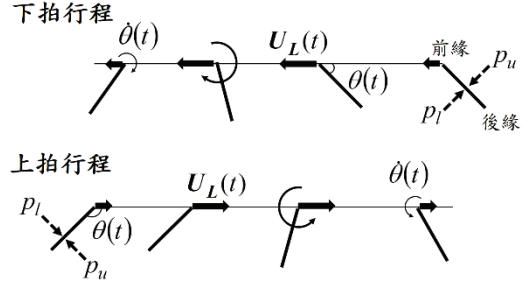


圖 1. 昆蟲懸停拍翅行程之示意圖

2.2 流體運動方程式

2.2.1 勢流理論

本文採勢流理論來計算昆蟲翅膀拍動所造成的流場變化。勢流理論假設流體不具黏滯性且流場速度 u 滿足不可壓縮((3)式)及無旋性((4)式)條件：

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times u = 0 \quad (4)$$

由於速度向量場滿足非旋性，故存在一個純量函數 ϕ ，使得速度向量場可以表示為此純量函數 ϕ 的梯度：

$$u = \nabla \phi \quad (5)$$

其中 ϕ 稱為速度勢 (velocity potential)，因此只要知道 ϕ ，便可得知任何一處的流體速度。這樣的流場稱之為勢流。將(5)式代入(3)式，可得到：

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (6)$$

此即為勢流流場所需滿足的統御方程式，其形態為一線性的拉普拉斯方程式 (Laplace's equation)。解出 ϕ 之後，流場的速度向量即可由(5)式得出，而流場各處的壓力則可藉由非定常形式的白努力方程式 (unsteady Bernoulli equation) 求得，如下(無因次形式)：

$$p = p_\infty - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \right) \quad (7)$$

其中 p_∞ 代表流場無窮遠處的參考壓力，此處假設無窮遠處流體速度為靜止。

2.2.2 邊界條件

由於非黏性流體可在固體表面上滑動，因此流體在與固體交界處所需滿足的條件為不可穿越邊界條件 (no-penetration boundary condition)；亦即在固體的邊界上，流體速度在邊界表面的垂直分量必須等於固體當時運動速度的垂直分量，避免形成流體穿越固體的不合理狀況，其數學式為：

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_P \cdot \mathbf{n} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{n}$ 為固體邊界的單位法向量、 $\mathbf{V}_P$ 為固體邊界速度。

2.2.3 Kutta 條件

根據勢流理論，當非黏性流體流經物體尖銳的尾端時，會做急遽的轉彎，使得流體的加速度達到無窮大，因而在尾端處形成一奇異點 (singular point)。然而真實的狀況是物體表面邊界層內的流體在流經尖銳的尾端時，會因黏滯性的作用而直接從物體尾端處脫離物體 (flow separation) 並向下游流去，因此不會形成奇異現象。若欲以勢流模式來模擬此真實的流動狀況，則原先的勢流解需加以修正。其作法是在環繞物體周圍的流場加上一個適當的環流量 (circulation, Γ)，其強度恰好使得非黏性流體自物體尾端處平滑流出，參見圖 2，如此奇異點則得以去除，此稱之為 Kutta 條件。

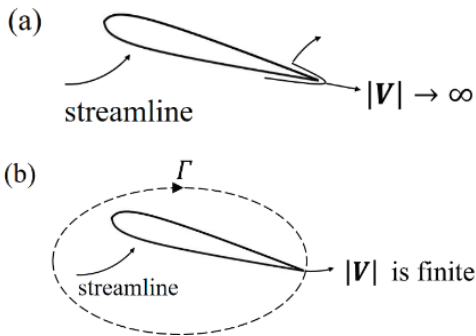


圖 2. 勢流流場流經物體尾端尖銳處之流線示意圖：

(a)不考慮 Kutta 條件 (b)考慮 Kutta 條件

2.2.4 Kelvin 環流量守恆定理

當物體一直在改變其運動狀態時(譬如作直線加速或改變運動方向)，在其尾端處會持

續剝離出具渦度(vorticity)的流體。在非黏性流場的假設下，這些剝離的渦流可以一無厚度的渦面(vortex sheet)來模擬(見圖 3)，而剝離渦流的強度則需遵守 Kelvin 環流量守恆定理：

$$\frac{d\Gamma_{total}}{dt} = 0 \quad (9)$$

其中 Γ_{total} 為環繞物體流場及所有剝離出去渦流之環流量的總和。Kelvin's 定理敘述了非黏性流場中任何時刻流場的總環流量須守恆。所以當物體在做加速度運動時，環繞在物體周圍的環流量會改變，此時在物體尾端會剝離出新的渦流，其強度大小必須使得整個流場的環量總和與上一刻相同。

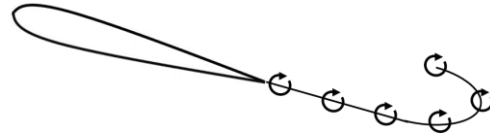


圖 3. 以無厚度渦面模擬尾流示意圖

2.3 翅膀彈性變形運動方程式

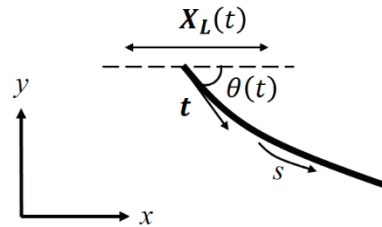


圖 4. 昆蟲翅膀坐標系示意圖

本文假設昆蟲翅膀為一不可延展的彈性體，並且以 Lagrangian 座標(s)來描述翅膀位置(見圖 4)，其座標則從翅膀前緣($s=0$)沿著翅面至後緣($s=c$)。本研究以樑的幾何非線性方程式[17,21]來計算翅膀的彈性變形，其統御方程式(無因次形式)如下：

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right) - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(EI \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial s^2} + \eta E I \frac{\partial^3 \mathbf{X}}{\partial t \partial s^2} \right) + \mathbf{F}_e \quad (10)$$

其中 s 為弧長、 $\mathbf{X} = (X(s, t), Y(s, t))$ 為翅膀的位置向量、 T 為沿著 s 座標的張力大小、 EI 為翅

膀的撓性剛度、 η 為耗散係數[23]、 F_e 為翅膀所受到的外力。接下來藉由張力的帕松方程式((11)式)及不可延展條件((12)式)可求出翅面上的張力分布[21]。值得注意的是此張力分布可使得翅膀弦長在拍翅的每一刻幾乎維持不變。

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(T \frac{\partial X}{\partial s} \right) &= \frac{\rho_s}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial X}{\partial s} \cdot \frac{\partial X}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{\partial \rho_s}{\partial s} \left(\frac{\partial X}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \right) - \rho_s \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial s} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial s} \\ &- \frac{\partial X}{\partial s} \cdot \frac{\partial}{\partial s} (F_b + F_e) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial X}{\partial s} \cdot \frac{\partial X}{\partial s} = 1 \quad (12)$$

其中 $F_b = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(EI \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} + \eta EI \frac{\partial^3 X}{\partial t \partial s^2} \right)$ 。大部

分探討翅膀彈性效應的文獻[17, 24]都將昆蟲振翅所產生的翅面變形視為是懸臂樑受力後所產生的彎曲變形。本文分別將翅膀前緣及後緣視為固定端及自由端，其邊界條件設置如下：

(a) 固定端(前緣)：

$$X = X_L(t), \quad \frac{\partial X}{\partial s} = \mathbf{t} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \quad (13)$$

其中 $\mathbf{t}$ 為翅膀前緣的單位切線向量。

(b) 自由端(後緣)：

$$\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(EI \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right) = 0 \quad (14)$$

三、數值方法

3.1 板格法

勢流的統御方程為一線性的偏微分方程式，故其解具有線性疊加(superposition)的特性。將源流(source)、沉流(sink)及渦流(vortex)等勢

流的基本單元解作適當疊加後可得到複雜的勢流場。一種常見求解勢流的方法即是假想在固體表面上放置連續分布的勢流單元，其強度恰好使得固體表面各處的流體速度皆滿足不可穿越邊界條件，藉此來模擬固體運動所產生的流場。一般要模擬具有厚度的物體在流場中運動，所使用的勢流基本單元解為源流及沉流，若物體是無厚度的平板則採用渦流單元即可。板格法即是基於上述概念所建立的一種求解勢流場的數值方法[25]。

在渦流板格法中會將平板切割成 m 等分的板格，在板格上放置強度待定的單元渦流來模擬流體受到平板運動的效應(見圖 5)。在平板上分布的渦流稱之為固定渦流(bound vortex)，其線強度(為單位長度下的渦流強度大小)以 γ 表示。圖 5 顯示在第 n 步時刻，位於平板第 i 個板格上的固定渦流分布 $\gamma(s_i)ds_i$ 對流場中任一點 $P(x, y)$ 所引發的速度勢 $\phi_{b,i}^{(n)}$ 為：

$$\phi_{b,i}^{(n)}(x, y) = - \left[\int_0^{\Delta s} \frac{\gamma(s_i)}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y - y(s_i)}{x - x(s_i)} \right) ds_i \right]^{(n)} \quad (15)$$

根據 Kutta 條件及 Kelvin 環流量守恆定理，平板在作非定常運動時會在其前端及後端之切線方向持續不斷的剝離出渦流，此渦流稱之為自由渦流(free vortex)，其強度以 Γ 表示(見圖 5)。而這些於第 n 時步前所剝離出去的自由渦流對點 $P(x, y)$ 所產生的速度勢 $\phi_f^{(n)}$ 為：

$$\begin{aligned} \phi_f^{(n)}(x, y) = & - \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma_L^k}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y - y_L^k}{x - x_L^k} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma_T^k}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y - y_T^k}{x - x_T^k} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

(16)式中的 Γ_L^k 與 Γ_T^k 分別為第 k 個時步時刻

($k \leq n$)，從前緣與後緣剝離出去的自由渦流強度，其座標分別為 (x_L^k, y_L^k) 與 (x_T^k, y_T^k) 。將所有平板上的固定渦流以及剝離出去的自由渦流的貢獻作疊加，即可得流場中任意一點 $P(x, y)$ 因平板運動所產生的速度勢 $\phi^{(n)}$ ：

$$\phi^{(n)}(x, y) = \sum_{i=1}^m \phi_{b,i}^{(n)} + \phi_f^{(n)} \quad (17)$$

得到流場速度勢後再藉由(5)式即可得 P 點處的流場速度向量。值得注意的是，當平板開始不同的運動模式時，為了符合 Kutta 條件及 Kelvin 環流量守恆定理，板格上的固定渦流及準備要剝離的自由渦流皆會產生相對應的強度及旋轉方向(見圖 5)。

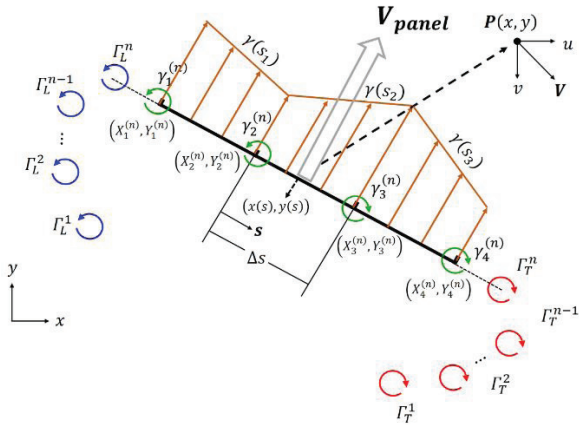


圖 5. 渦流板格法示意圖，以板格數 $m=3$ 為例。其中綠色部分為固定渦流、紅色及藍色部分分別為順時針及逆時針旋轉的自由渦流、咖啡色部分為固定渦流強度分布、灰色部分為板格運動速度

3.2 求解渦流待定強度

考量到計算精準度與運算時間，本文假設每個板格上的固定渦流線強度為線性分布：

$$\gamma(s_i) = \gamma_i + (\gamma_{i+1} - \gamma_i) \frac{s_i}{\Delta s_i} \quad (18)$$

因此 m 個板格則有 $m+1$ 個待決定的固定渦流線強度($\gamma_i^{(n)}$)，如圖 5 所示。同時，平板在每一

時刻皆會於兩端點剝離出適當強度的自由渦流(Γ_L^n, Γ_T^n)，因此在每一個計算時步共需求解 $m+3$ 個未知數。此 $m+3$ 個未知數須滿足位於每個板格中心控制點處的流固不可穿越邊界條件((19)式，共 m 條方程式)、Kutta 條件(作用在平板前緣((20)式)及後緣((21)式)，共 2 條方程式)以及 Kelvin 環流量守恆定理((22)式，1 條方程式)來求解，一共 $m+3$ 條限制方程式。

$$\mathbf{u}_i^{(n+1)} \cdot \mathbf{n}_i^{(n+1)} = V_{P,i}^{(n+1)} \cdot \mathbf{n}_i^{(n+1)}, \quad i=1 \text{ to } m \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_L^{(n+1)} \cdot \mathbf{n}_L^{(n+1)} = V_{P,L}^{(n+1)} \cdot \mathbf{n}_L^{(n+1)} \quad (20)$$

$$\mathbf{u}_T^{(n+1)} \cdot \mathbf{n}_T^{(n+1)} = V_{P,T}^{(n+1)} \cdot \mathbf{n}_T^{(n+1)} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta s}{2} (\gamma_1^{(n+1)} + \gamma_{m+1}^{(n+1)}) + \Delta s \sum_{i=2}^m \gamma_i^{(n+1)} \\ & + (\Gamma_L^{n+1} + \Gamma_T^{n+1}) \\ & = \frac{\Delta s}{2} (\gamma_1^{(n)} + \gamma_{m+1}^{(n)}) + \Delta s \sum_{i=2}^m \gamma_i^{(n)} \end{aligned} \quad (22)$$

其中上標 $(n+1)$ 及 (n) 分別為待求解計算時步及目前計算時步、 Δs 為板格長度。將(19)至(22)式做聯立進行求解，即可得第 $n+1$ 個時步下板格上的固定渦流線強度(γ_j)及準備要剝離出去的自由渦流強度(Γ_L^k, Γ_T^k)。

3.3 自由渦流的流動

二維自由點渦流可以看成是一條垂直於流場平面且無窮長的渦流線(vortex line)，在勢流理論中渦流線是跟隨著流體質點運動的物質線(material line)，所以自由渦流的流動可藉由該點處的速度來求得。在數值上，本研究以具有二階精度的 Crank-Nicolson 法來處理，即下一步(即第 $n+1$ 步)自由渦流的位置 $\mathbf{r}$ ：

$$\mathbf{r}^{(n+1)} = \mathbf{r}^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{u}^{(n+1)}) \quad (23)$$

由於自由渦流的中心點為奇異點(singular point)，速度達到無窮大。當兩顆自由渦流因位

置計算上的誤差導致非常接近時，對彼此的速度貢獻會非常大，使得自由渦流在下一步的位移會異常的偏離，而理論上尾流應該是一個連續的面。為了修正這個問題，我們採用 Rankine 渦流模式來計算自由渦流的速度貢獻，其速度分布如下：

$$V_{\theta} = \begin{cases} \frac{r}{2\pi c^2} \Gamma, & r < \varepsilon \\ \frac{1}{2\pi r} \Gamma, & r \geq \varepsilon \end{cases} \quad (24)$$

其中 ε 為黏滯核心(viscous core)的半徑，為一很小的值，本文統一將 ε 設置為 0.001。此作法相當於是把自由渦流修正成一個具有黏滯核心的渦流，在核心內由於受到黏滯力的影響，其速度以線性的方式遞減至零。如此一來，當兩顆自由渦流太靠近時，就不會引發太大的速度貢獻。圖 6 為 Rankine 渦流模式的速度分布圖。

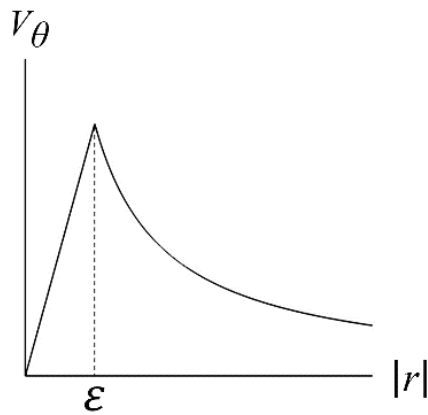


圖 6. Rankine 渦流模式之速度分布

3.4 翅膀受力計算

在勢流理論中，由於沒有黏滯力的作用，物體只會受到流體所給予壓力作用。由於我們想求得不同時刻下翅膀各處所受到的壓力，故採用移動座標下的白努力方程式來計算會較為方便，將 $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\phi}{dt} - \mathbf{V}_P \cdot \nabla \phi$ 代入(7)式，可得翅膀上任一板格(i)控制點之壓力大小：

$$p_i = p_{\infty} - \left[\frac{d\phi_i}{dt} - \mathbf{V}_{P,i} \cdot \nabla \phi_i + \frac{1}{2} |\nabla \phi_i|^2 \right] \quad (25)$$

其中 $\mathbf{V}_{P,i}$ 為板格控制點運動速度向量， $\frac{d\phi_i}{dt}$ 為板格控制點速度勢隨著翅膀運動所產生的變化率。因此我們可藉由板格控制點兩側的壓差來求得受到的淨壓力大小 Δp ：

$$\begin{aligned} \Delta p_i &= p_{l,i} - p_{u,i} \\ &= \frac{d(\phi_{u,i} - \phi_{l,i})}{dt} - \mathbf{V}_{P,i} \cdot (\nabla \phi_{u,i} - \nabla \phi_{l,i}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (|\nabla \phi_{u,i}|^2 - |\nabla \phi_{l,i}|^2) \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $p_{l,i}$ 與 $p_{u,i}$ 分別為板格(i)控制點下側及上側所受到的壓力(見圖 1)。值得注意的是，(26)式中的 Δp 與(10)式中的外力項 $\mathbf{F}_e$ ，兩者在有因次的情況下會相差一個翅膀展長(l)的長度因次，因此兩力間的關係在無因次化後為：

$$\mathbf{F}_e = \lambda(\Delta p) \mathbf{n} \quad (27)$$

其中 $\lambda = l/c$ 為翅膀展弦比、 $\mathbf{n}$ 為板格上的單位法向量。在計算出各個板格控制點兩側的壓差後，將其投影到水平方向後作加總，即可得到平板在流場中所獲得的升力 F_L ：

$$F_L = \sum_i \Delta p_i \Delta s_i c \cos \theta_i \quad (28)$$

其中 θ_i 為每個板格與+x 軸間的夾角。

3.5 數值迭代

由於我們無法同時求解流體及固體的統御方程式，因此需採用迭代的方式進行修正，其步驟如下：

1. 令 $k = 1$ 、 $^{(k-1)}\mathbf{X}_i^{(n+1)} = \mathbf{X}_i^{(n)}$ 、 $^{(k-1)}\mathbf{F}_{e,i}^{(n+1)} = \mathbf{F}_{e,i}^{(n)}$ 。其中 $(n+1)$ 及 (n) 分別為待求解計算時步以及目前計算時步、 k 為迭代步數。

2. 將 $^{(k-1)}X_i^{(n+1)}$ 及 $^{(k-1)}F_{e,i}^{(n+1)}$ 代入離散形式的張力的帕松方程式((11))式後，再利用不可延展條件((12))式，可得 $^{(k)}T_i^{(n+1)}$ 。
3. 將 $^{(k-1)}F_{e,i}^{(n+1)}$ 及 $^{(k)}T_i^{(n+1)}$ 代入離散形式的樑的幾何非線性運動方程式((10))式，可得 $^{(k)}X_i^{(n+1)}$ 。
4. 利用上一步驟求得的 $^{(k)}X_i^{(n+1)}$ 來計算每個板格控制點的運動速度向量 $^{(k)}V_{P,i}^{(n+1)}$ 。然後利用(19)至(22)式做聯立進行求解，以求得 $^{(k)}\gamma_i^{(n+1)}$ 、 $^{(k)}\Gamma_L^{(n+1)}$ 及 $^{(k)}\Gamma_T^{(n+1)}$ 。
5. 藉由 $^{(k)}\gamma_i^{(n+1)}$ 、 $^{(k)}\Gamma_L^{(n+1)}$ 及 $^{(k)}\Gamma_T^{(n+1)}$ 來求得流場上每個自由渦流中心點的速度勢，以更新所有自由渦流的位置((23))式。接著，利用(26)式求得 $^{(k)}F_{e,i}^{(n+1)}$ 。
6. 當 $k > 1$ 且 $\sqrt{\sum_{i=1}^m (^{(k)}X_i^{(n+1)} - ^{(k-1)}X_i^{(n+1)})^2} / m \leq \epsilon$ (容許誤差值)時，即結束迭代過程；否則，令 $k = k + 1$ 且回到步驟 2 重新運算。

3.6 數值驗證

做數值計算前必須先將空間及時間做離散。為了能在合理的運算時間下得到精確的數值解，必須做板格尺寸(Δs)及時間步長(Δt)的獨立測試，以獲得較適當的 Δs 及 Δt 來進行運算。以下將以剛性翅膀為例，其拍動參數： $A_0 = 4c$ 、 $t_{rot} = 0.1T_c$ 及 $\Delta t_{rot} = 0.4T_c$ ，並以升力係數 $C_L (= 2F_L / \rho U^2 c)$ 來作數值比對。

3.6.1 板格尺寸獨立測試

本小節在固定 $\Delta t = T_c / 6000$ 的情形下，探討 Δs 對數值解的影響。以下將測試三組不同的板格尺寸，分別為 $\Delta s_1 = 0.002$ 、 $\Delta s_2 = 0.001$ 以及 $\Delta s_3 = 0.0005$ 。圖 7 顯示將板格尺寸 Δs 縮小後有收斂的趨勢，且 Δs_2 與 Δs_3 的數值解分

布情形幾乎一致。考量到計算精度以及運算時間，本研究以 Δs_2 作為往後運算的板格尺寸。

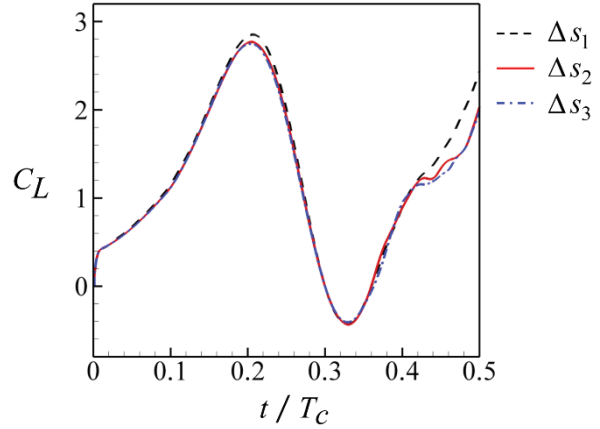


圖 7. 不同板格尺寸 Δs 對數值解的影響圖

3.6.2 時間步長獨立測試

本小節在固定 $\Delta s = 0.001$ 的情形下，探討 Δt 對數值解的影響。以下將測試三組不同的時間步長，分別為 $\Delta t_1 = T_c / 3000$ 、 $\Delta t_2 = T_c / 6000$ 及 $\Delta t_3 = T_c / 12000$ 。圖 8 顯示時間步長 Δt 縮小後有收斂的趨勢，且 Δt_2 與 Δt_3 的數值解相當接近。考量到計算精度以及運算時間，本研究以 Δt_2 做為往後運算的時間步長。

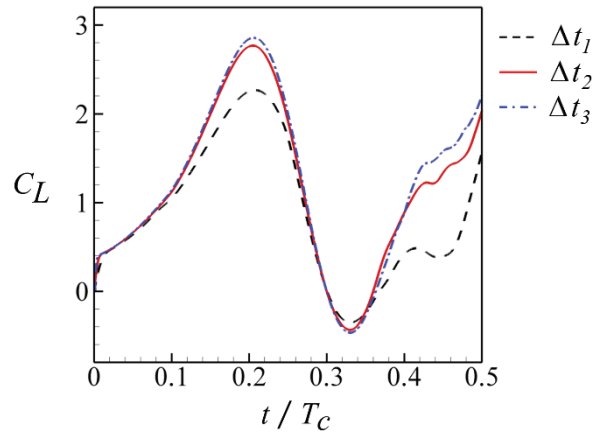


圖 8. 不同時間步長 Δt 對數值解的影響圖

四、結果與討論

為了進一步了解撲翼飛行產生升力的機制，本研究將針對撓性剛度(EI)及旋轉角速度效應進行探討。此外，本研究將以較小型的飛

行昆蟲(如果蠅)的翅膀線密度($\rho_s=10$)及拍翅頻率($f=200$)做為參考參數[26]。在本研究中，翅膀的拍動距離設定為 $A_0=4c$ (一般討論昆蟲翅膀的拍動範圍在 3 至 $5c$ 之間[22])、初始前緣角 $\theta(0)=-\pi/4$ 及前緣角變化量 $\Delta\theta=\pi/2$ (取自參考文獻[12])。

4.1 不同撓性剛度對拍翅升力的影響

關於翅膀撓性剛度大小，我們則依翅膀拍動頻率 f 與自然頻率 f_n 間的比值 R_f 來作為選取依據。一般探討翅膀彈性效應的文獻[17, 24]都將昆蟲振翅所產生的翅面變形視為是懸臂樑受力後所產生的彎曲變形，因此昆蟲翅膀的自然頻率是採懸臂樑振動的第一模態為代表，其公式(無因次化形式)如下：

$$f_n = \frac{k_1^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho_s}} \quad (29)$$

其中 $k_1=1.8751$ ，為懸臂樑第一振動模態之參數。接下來再將關係式 $R_f=f/f_n$ 代入(29)式，可得：

$$EI = 4 \frac{\pi^2}{k_1^4} \left(\frac{f}{R_f} \right)^2 \rho_s \quad (30)$$

因此只要給定昆蟲的拍翅頻率 f 、昆蟲翅膀之線密度 ρ_s 及 R_f 值，即可得昆蟲翅膀的撓性剛度。本節共選取 5 組不同撓性剛度，分別以編號 A、B、C、D 和 E 作為代稱(見表 1)。

表 1. 彈性板 R_f 與 EI 數值對照表

翅膀	A	B	C	D	E
R_f	0	0.2	0.3	0.4	0.5
EI	∞	5.0	2.2	1.3	0.8

本節將翅膀的旋轉運動參數設置在 $t_{rot}=0.1T_c$ 及 $\Delta t_{rot}=0.4T_c$ 的情況下探討撓性剛度對撲翼飛行氣動力學的影響。圖 9 顯示不同撓性剛度的翅膀在第一個拍翅週期內所獲得的升

力係數隨時間之變化，而圖 10 則呈現了 A、C、E 翅膀在第一個拍翅週期中，翅膀的幾何形狀變化及受力情形。為了方便討論，我們以翅膀前緣的運動情況將拍動週期分成六個區段，分別為水平加速運動(I、IV 區段)、水平加速與向下旋轉運動(II、V 區段)以及水平減速及向上旋轉運動(III、VI 區段)。我們可從圖 10 發現現在下拍行程初始階段(I 區)翅膀做平移加速時，越剛性的翅膀所受到的作用力越大(見箭頭大小)。其原因在於彈性體會藉由彎曲變形而將部分流體作用力儲存在彈性能內，而完全剛性的翅膀(A 翅膀)則會直接反應出流體所給予的作用力。由於本節所探討的是勢流，翅膀所受到的作用力即為壓力，故由圖 11 亦可發現越剛性的翅膀其受到的前後平均壓力係數差 $C_{P,l}-C_{P,u}$ ($C_P \equiv 2(p-p_\infty)/\rho U^2 c$)也越大。雖然圖(12)顯示撓性剛度越小的翅膀在 I 區的水平投影面積 L_H (其作用是將流體作用力投影成向上的升力， L_H 定義可參見圖 13)越大，但同時其受到的前後壓力也越小。在以上兩現象相互抵銷的情況下，完全剛性的翅膀在 I 區可獲得最高升力(見圖 9)。

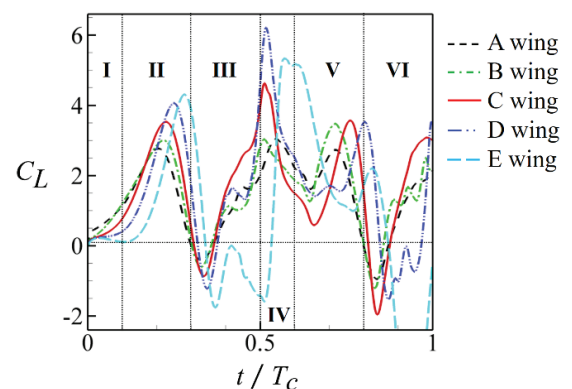


圖 9. 不同撓性剛度之翅膀於拍翅週期內升力係數隨時間變化圖

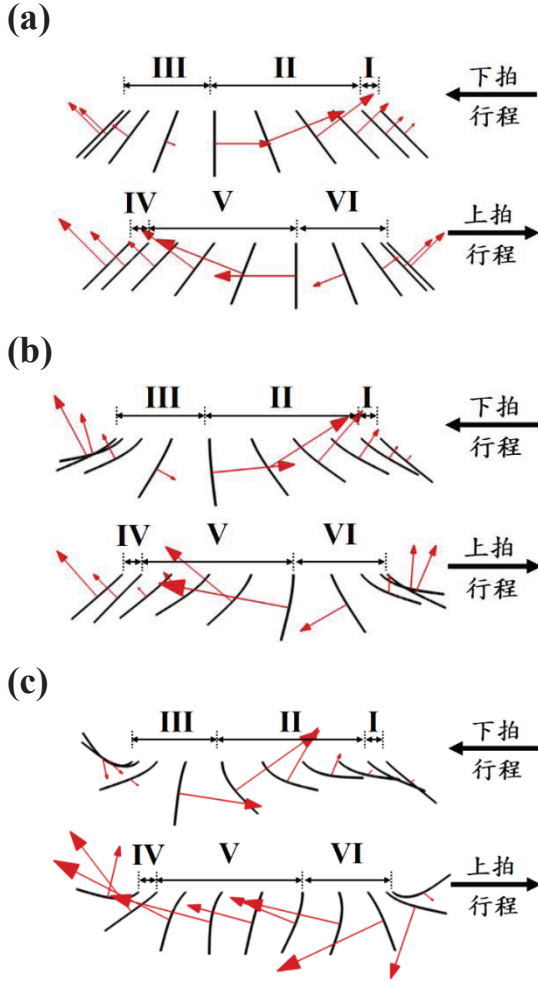


圖 10. 不同撓性剛度之翅膀於拍翅週期內的受力及變形情形：(a) A 翅膀，(b) C 翅膀，(c) E 翅膀（其中紅色箭頭為翅膀所受到的合力向量）

當翅膀開始旋轉時(II 區前段)，翅膀受到的作用力會逐漸增加(見圖 10 和 11)，同時彈性翅膀會持續的將流體作用力所做的部分功儲存在彈性變形的位能內，由圖 10 亦可發現彈性翅膀(C、E 翅膀)變形的情況會較 I 區更為劇烈，進而導致其水平投影面積會持續的上升(見圖 12)，但同時其受到的前後壓差則會更顯著的較 A 翅膀小(見圖 11)。待 C 和 E 翅膀開始發生彈性釋放時(II 區後段)會迅速的提高翅膀與流體間的相對速度，因此彈性翅膀所受到的作用力會迅速上升，並且超越剛性翅膀(見圖 11)。而在 II 區後段，由於剛性翅膀(A 翅膀)

的水平投影面積逐漸下降，使得其升力也隨之下降至 0 ($t/T_c = 0.3$ 時，因剛性翅膀在此刻無水平投影面積，故其獲得的升力為 0)。然而在 $t/T_c = 0.3$ 時由於彈性翅膀還存在一定大小的水平投影面積，因此彈性翅膀在此刻還會持續的獲得升力。當翅膀前緣開始向上旋轉時(III 區初期)，A 翅膀即開始受到向下的力；反之，由於彈性翅膀的後段還處於向下拍打的情況，故依舊可以獲得向上的升力(撓性剛度越小，此現象越明顯)。值得注意的是在 III 區後段，由於 E 翅膀的撓性剛度過小使其向上擺盪的幅度過大，因而受到流體給予向下且相當大的反作用力(見圖 10 中 E 翅膀在 III 區後段的受力情形)，因此 E 翅在此區段內的升力為負值(見圖 9)。

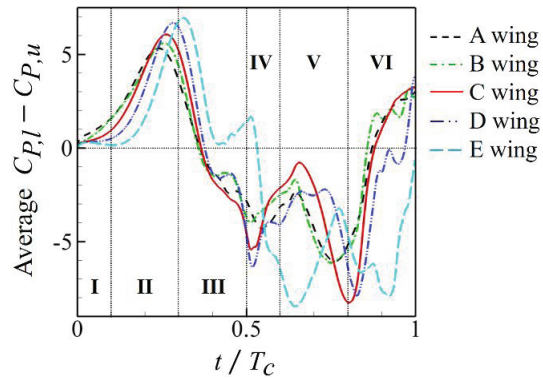


圖 11. 不同撓性剛度之翅膀於拍翅週期內翅膀前後之平均壓差係數隨時間變化圖

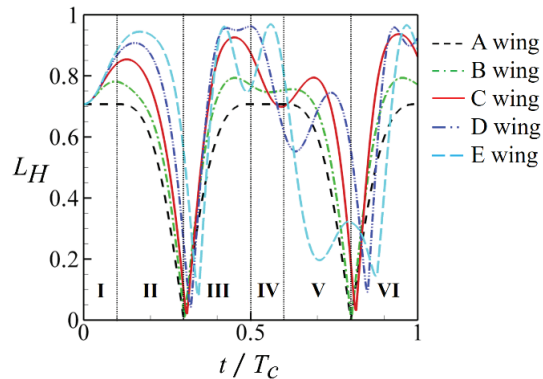


圖 12. 不同撓性剛度之翅膀於拍翅週期內翅膀水平投影面積隨時間變化圖

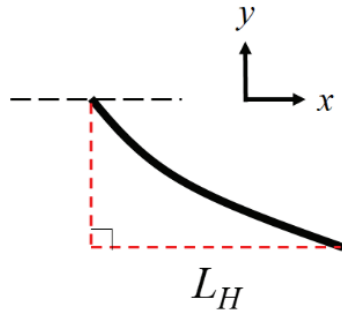


圖 13. 翅膀水平投影面積示意圖

從圖 9 及 10 的 III 區後段可發現，當翅膀向上擺盪時升力都有上升的趨勢(除 E 翅膀)。理論上翅膀在向上擺盪時會受到流體給予向下的反作用力，但由於翅膀在向上擺盪過程的末段會受到翅膀後方由前緣渦(LEV)及後緣渦(TEV)所構成的渦流對所引發的噴流速度向量 U_J 給予向上的推力(見圖 14)，因此升力會有上升的趨勢。而 E 翅膀由於向上擺盪的速度 U_W 過快且幅度過大，使得翅膀後方的渦流對所引發的噴流速度向量 U_J 未能直接有效的作用於翅膀上(見圖 15)，因此 E 翅膀在 III 區後段所受到的升力並未像其他翅膀一樣有明顯上升的趨勢。而上述所提到的渦流對還會於翅膀開始反轉其拍打行程時與翅膀直接產生相互作用(見圖 16)，因此圖 11 顯示出翅膀受到的前後壓差有明顯上升的趨勢。此種翅膀與渦流相互作用的現象，早期文獻[6]稱為尾流捕捉(wake capture)，而本文強調翅膀主要是受到渦流對所引發的噴流效應影響，因此我們將之稱為渦流對捕捉效應(vortex-pair capture effect)。此外，圖 11 的 IV 區前段顯示翅膀所受到的前後壓差大小隨著撓性剛度的下降而越大(E 翅膀除外)，而圖 12 也顯示翅膀在該時刻水平方向的投影面積大小也是隨著撓性剛度的減小而增大(E 翅膀除外)，故 D 翅膀在 IV 區前段會得到最大的升力峰。

由以上探討可發現翅膀的彈性效應除了影響翅膀的水平投影面積外，更會對翅面上所

受到的壓差產生相當大的影響(包含與噴流 U_J 相互作用的程度)。當翅膀處於彈性儲存或彈性釋放時都會使得彈性翅膀的受力情形與剛性翅膀截然不同(見圖 11)。由圖 9 所顯示的升力係數分布可發現除了 E 翅膀外，基本上彈性翅膀都可獲得較剛性翅膀高的升力。最後，圖 17 顯示了不同撓性剛度翅膀於拍翅一週期內所受到的平均升力係數 $\overline{C_L}$ ，其中獲得最高升力的為 C 翅膀，其升力係數為 1.64，比完全剛性翅膀提高了約 20% 左右。

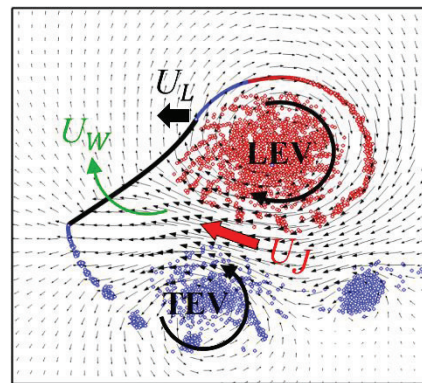


圖 14. C 翅膀向上擺盪時受到渦流對所引發噴流給予向上推力之流場向量圖($t/T_c = 0.4$)。其中紅點及藍點分別為順時針及逆時針旋轉的自由渦流、 U_L 為翅膀前緣速度向量、 U_J 為噴流速度向量、 U_W 為翅膀向上擺盪的速度向量

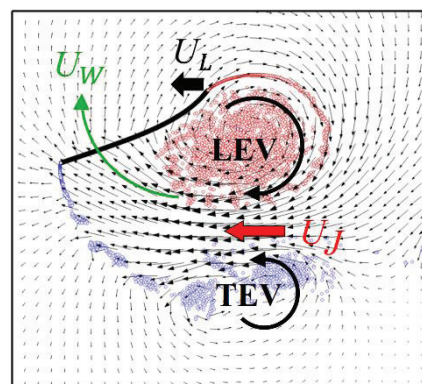


圖 15. E 翅膀向上擺盪時未有效受到渦流對所引發噴流給予向上推力之流場向量圖($t/T_c = 0.4$)。其中紅點及藍點分別為順時針及逆時針旋轉的自由渦流

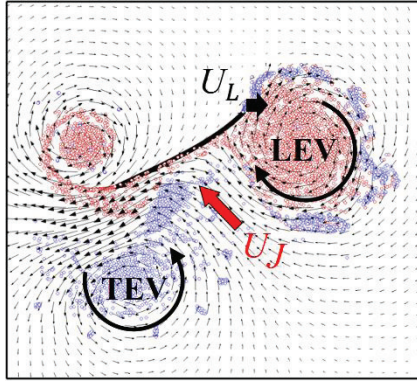


圖 16. C 翅膀於上拍行程初始與渦流對所引發噴流直接相互作用之流場向量圖($t/T_c=0.5$)。其中紅點及藍點分別為順時針及逆時針旋轉的自由渦流

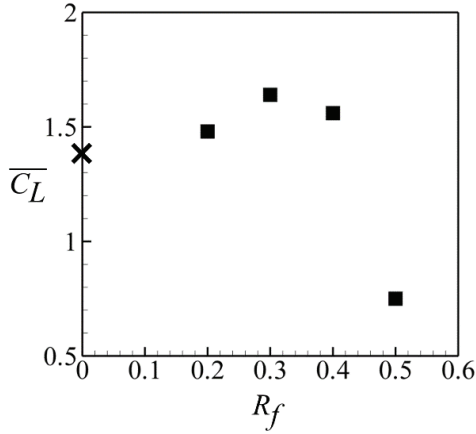


圖 17. 不同撓性剛度之翅膀於拍翅週期內所獲得的平均升力係數比較圖，其中x為完全剛性翅膀之值

4.2 不同旋轉角速度對拍翅升力的影響

撲翼飛行除了受到彈性效應外，其翅膀的旋轉機制也相當重要。接下來我們將以 4.1 節中的 C 翅膀的線密度及撓性剛度為代表參數（見表 1），探討不同旋轉角速度 $\dot{\theta}$ 對升力的影響。本節分別以編號 A_r 、 B_r 及 C_r 來代表不同旋轉角速度的翅膀（見表 2）。圖 18 顯示了 A_r 、 B_r 及 C_r 翅膀的旋轉角速度分布圖。其中 B_r 翅膀即為 4.1 節中的 C 翅膀。

表 2. 翅膀旋轉角速度與編號對照

翅膀	A_r	B_r	C_r
t_{rot}	0	$0.1T_c$	$0.2T_c$
Δt_{rot}	$0.5T_c$	$0.4T_c$	$0.3T_c$

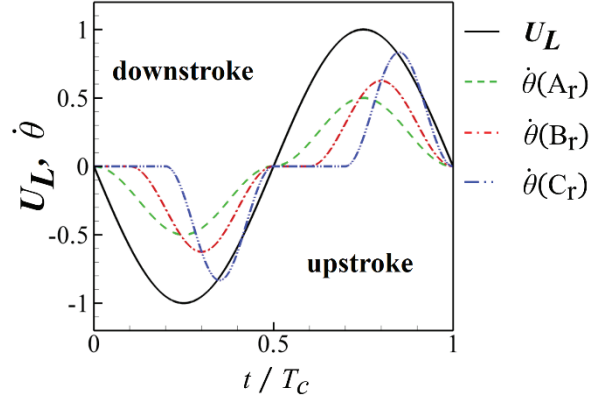


圖 18. 翅膀平移速度與不同旋轉角速度分布圖

圖 19 顯示了在不同旋轉角速度下，翅膀於第一個拍翅週期內所獲得的升力係數隨時間之變化，圖 20 則呈現了三組翅膀在第一個拍翅週期內翅膀的受力及變形情況。我們可發現由於 A_r 翅膀於下拍行程一開始即同時進行平移及旋轉運動，因此翅膀受到的前後壓差會較其他翅膀大（見圖 21），且三組翅膀於 I 區內的水平投影面積大小相當，故 A_r 翅膀於 I 區可獲得最大升力。接下來， A_r 翅膀於 II 區前段由於翅膀較早發生旋轉，使得翅面較垂直，因此其受到的前後壓差會迅速上升；但同時 A_r 翅膀的水平投影面積也於 II 區迅速下降，因此 A_r 翅膀的升力係數於 II 區後段會遠低於其他翅膀。 C_r 翅膀由於較晚發生旋轉且其旋轉角速度較大，故在 III 區會受到最大的壓差（見圖 21）。由圖 20 亦可發現 C_r 翅膀於 III 區後段的擺盪程度遠大於其他翅膀，雖然 C_r 翅膀在向上旋轉時（III 區）同樣會受到渦流對所引發的噴流速度向量 U_J 給予向上的推力（見圖 23），但由於 C_r 翅膀向上擺盪的速度 U_W 較快，故還會受到流體給予向下且較大的反作用力，導致 C_r 翅膀在 III 區後段獲得的升力會遠低於其他翅膀。然而 C_r 翅膀也會於接下來的上拍行程一開始時與渦流對所引發的噴流速度向量 U_J 直接產生正向的作用（見圖 24）。此外， C_r 翅膀在發生渦流對捕捉效應的同時還發生相當強烈的彈性釋放現象（見圖 20， C_r 翅膀於 III 區後期至 IV 區的形狀變化），更加強了翅膀與流體間的相對運動，因而再次提高了 C_r 翅膀的受力情形（見圖 21）。再者， C_r 翅膀於此時的水平投影面積更高達 0.95（見圖 22），故 C_r 翅膀會於上拍行程的初期（IV 區）獲得相當高的升力。

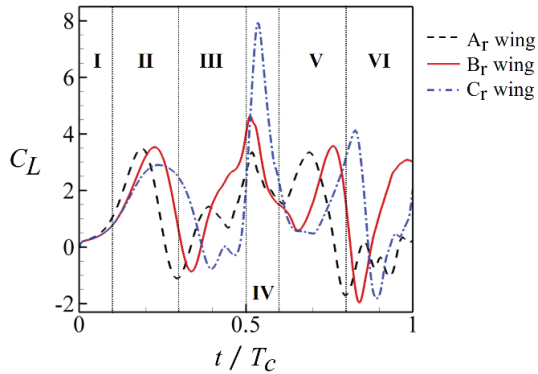


圖 19. 不同旋轉角速度下翅膀於拍翅週期內之升力係數隨時間變化圖

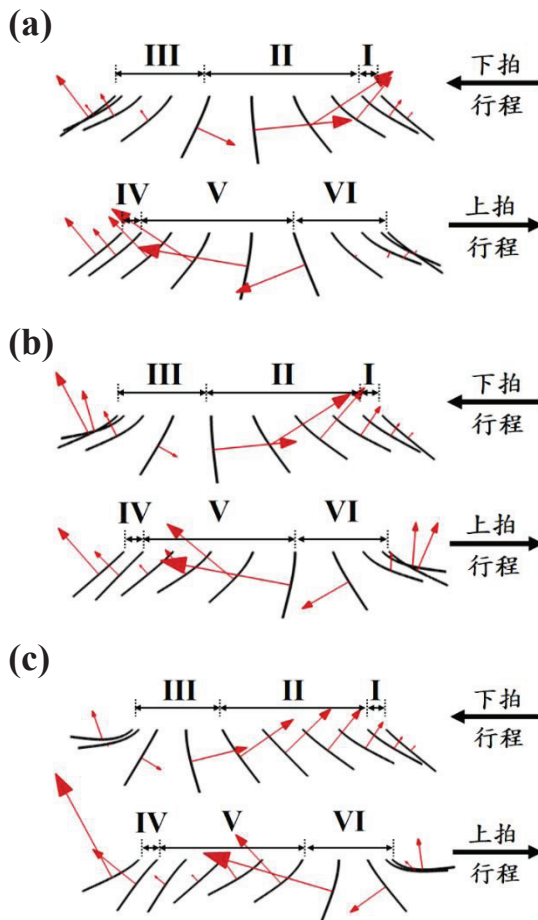


圖 20. 不同旋轉角速度下翅膀於拍翅週期內的受力及變形情形：(a)A_r 翅膀，(b)B_r 翅膀，(c)C_r 翅膀（紅色箭頭為翅膀所受到的合力向量）

同樣地，在上拍行程中當翅膀開始向下旋轉擺盪時(V 區)，由於 A_r 翅最先旋轉，C_r 翅最晚才旋轉，因此翅膀兩側壓差值在此區段的大小順序為 A_r>B_r>C_r (見圖 21)；然而三組翅膀在 V 區後半段處之水平投影面積大小順序為 C_r>B_r>A_r (見圖 22)，兩效應相互消長的結果，

造成三組翅膀在 V 區的升力峰值大小差不多 (見圖 19)，只是形成峰值的時間先後有別。在上拍行程末段翅膀開始向上旋轉擺盪時(VI 區)，由於 C_r 翅膀的旋轉角速度最快，受到流體向下的反作用力也最強，抵銷了部分渦流所給予的推力，因此 C_r 翅膀在此區段獲得最低升力，而 B_r 翅膀則是有最大的升力峰值。

綜合上述的討論可發現當翅膀前緣開始發生旋轉時(II 或 V 區)，翅膀前後的壓差會逐漸上升，因而升力也跟著上升。但在壓差上升的過程中，翅膀水平投影面積卻逐漸下降，因此太早或太晚發生旋轉運動對翅膀受到的升力都會產生負面的影響。再者，適當的前緣旋轉角速度亦可有效地受益於翅膀後方的噴流給予向上的推力，而再次獲得升力。圖 25 顯示了不同旋轉角速度翅膀所獲得的週期平均升力，其中獲得最高升力的為 B_r 翅膀，其平均升力係數為 1.64。

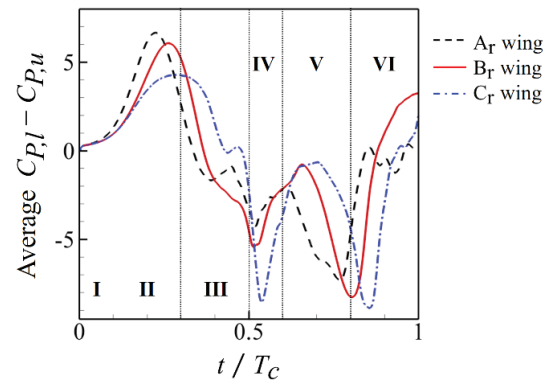


圖 21. 不同旋轉角速度之翅膀於拍翅週期內翅膀前後之平均壓差係數隨時間變化圖

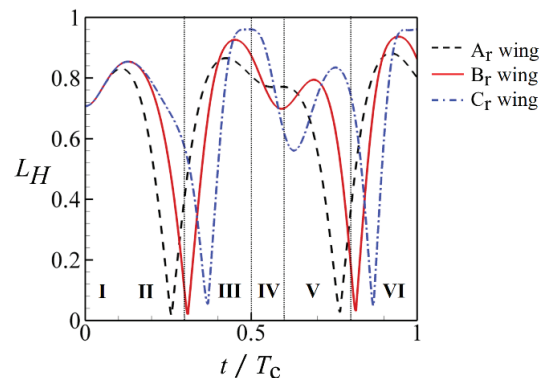


圖 22. 不同旋轉角速度之翅膀於拍翅週期內翅膀水平投影面積隨時間變化圖

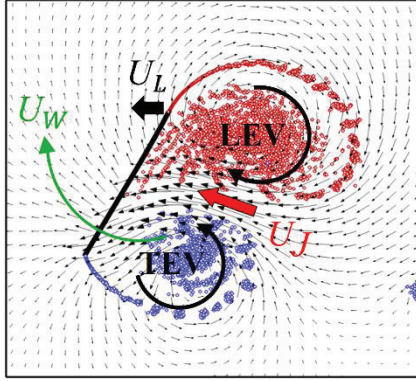


圖 23. C_r 翅膀向上擺盪時受到渦流對所引發噴流給予向上推力之流場向量圖($t/T_c=0.4$)。其中紅點及藍點分別為順時針及逆時針旋轉的自由渦流

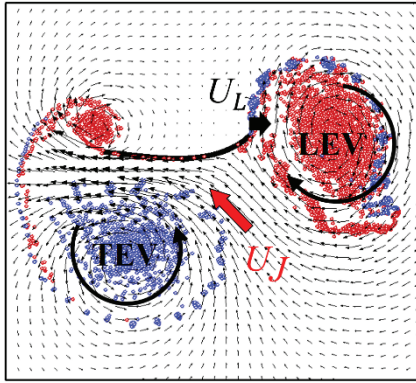


圖 24. C_r 翅膀於上拍行程初期與渦流對所引發之噴流直接產生作用之流場向量圖($t/T_c=0.5$)。其中紅點及藍點分別為順時針及逆時針旋轉的自由渦流

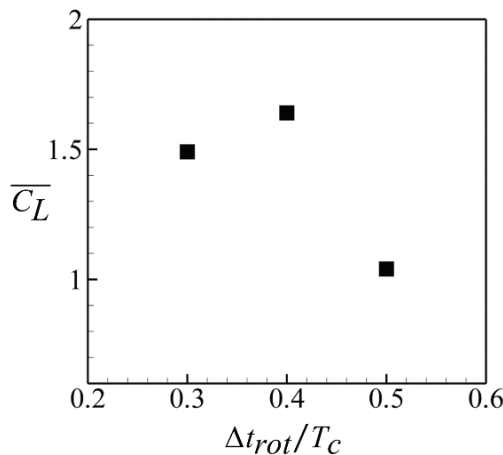


圖 25. 不同旋轉角速度之翅膀拍翅所獲得的週期平均升力係數比較圖

五、結論

為了方便解析翅膀撓性及旋轉效應對撲翼飛行器之氣動力學的影響，本文藉由數值模擬來探討二維流場下的流固耦合現象。再者，為了呈現翅膀拍動時產生的大變形姿態，本研究使用樑的幾何非線性運動方程式來求解翅膀受到流場作用力後的運動及變形。本文使用板格法計算出環繞在翅膀上及流場各處的速度勢，藉以求得撲翼飛行運動所引發的流場速度向量，接著利用非定常白努力方程式計算翅膀的受力情形。

本文研究結果指出剛性翅膀可於下拍行程中的平移加速或旋轉初始階段受到較大的流場作用力(此現象在上拍行程較不明顯，因不同撓性翅膀在下拍行程會產生不同型態的尾流)；而彈性翅膀則會先將部分的流場作用力儲存在彈性能中，因此一開始所受到的流場作用力較剛性翅膀小。待彈性釋放發生時則會提高翅膀與流體間的相對速度，因而大幅提升流場給予翅膀的作用力。此外，撓性效應還可提高翅膀的水平投影面積，並且適當的撓性剛度翅膀還可有效地利用渦流對捕捉效應再次提高升力。除了撓性效應外，本研究發現不同旋轉角速度亦會顯著影響翅膀的受力情形，適當的旋轉角速度可於翅膀向上擺盪時有效利用翅面後方的噴流給予向上的推力而減緩負升力發生的情形。

近幾十年來，人們嘗試模仿昆蟲撲翼飛行來製造高效率、高機動性的 MAV。本研究著眼於翅膀撓性及旋轉效應對拍撲飛行的影響，並理解拍動行為與空氣動力學的關係，用以提供未來 MAV 設計研發之方針。

參考文獻

- [1] Ellington, C. P., "The Aerodynamics of Hovering Insect Flight. I. The Quasi-Steady Analysis," Philosophical Transactions of the Royal Society of London. B, Biological Sciences, Vol. 305, No. 1122, pp. 1-15, 1984.
- [2] Ellington, C. P., "The Aerodynamics of Hovering Insect Flight. IV. Aerodynamic

- Mechanisms,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. B, Biological Sciences*, Vol. 305, No. 1122, pp. 79-113, 1984.
- [3] Dickinson, M. H., and Gotz, K. G., “Unsteady Aerodynamic Performance of Model Wings at Low Reynolds Numbers,” *Journal of experimental biology*, Vol. 174, No. 1, pp. 45-64, 1993.
- [4] Liu, L., and Sun, M., “The Added Mass Forces in Insect Flapping Wings,” *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 437, No. 1, pp. 45-50, 2018.
- [5] Ellington, C. P., Van Den Berg, C., Willmott, A. P., and Thomas, A. L., “Leading-Edge Vortices in Insect Flight,” *Nature*, Vol. 384, No. 6610, pp. 626-630, 1996.
- [6] Dickinson, M. H., Lehmann, F.-O., and Sane, S. P., “Wing Rotation and the Aerodynamic Basis of Insect Flight,” *Science*, Vol. 284, No. 5422, pp. 1954-1960, 1999.
- [7] Sun, M., and Tang, J., “Unsteady Aerodynamic Force Generation by a Model Fruit Fly Wing in Flapping Motion,” *Journal of experimental biology*, Vol. 205, No. 1, pp. 55-70, 2002.
- [8] Birch, J. M., and Dickinson, M. H., “The Influence of Wing–Wake Interactions on the Production of Aerodynamic Forces in Flapping Flight,” *Journal of experimental biology*, Vol. 206, No. 13, pp. 2257-2272, 2003.
- [9] Bluman, J., Kang, C.-K., and Biomimetics, “Wing-Wake Interaction Destabilizes Hover Equilibrium of a Flapping Insect-Scale Wing,” *Bioinspiration*, Vol. 12, No. 4, pp. 046004, 2017.
- [10] Lee, Y., and Lua, K. B., “Wing–Wake Interaction: Comparison of 2d and 3d Flapping Wings in Hover Flight,” *Bioinspiration & biomimetics*, Vol. 13, No. 6, pp. 066003, 2018.
- [11] Wang, Z. J., “Two Dimensional Mechanism for Insect Hovering,” *Physical review letters*, Vol. 85, No. 10, pp. 2216, 2000.
- [12] Miller, L. A., and Peskin, C. S., “When Vortices Stick: An Aerodynamic Transition in Tiny Insect Flight,” *Journal of Experimental Biology*, Vol. 207, No. 17, pp. 3073-3088, 2004.
- [13] Walker, S. M., Thomas, A. L., and Taylor, G. K., “Deformable Wing Kinematics in Free-Flying Hoverflies,” *Journal of the Royal Society Interface*, Vol. 7, No. 42, pp. 131-142, 2009.
- [14] Meresman, Y., Husak, J., Ben-Shlomo, R., and Ribak, G., “Morphological Diversification Has Led to Inter-Specific Variation in Elastic Wing Deformation During Flight in Scarab Beetles,” *Royal Society Open Science*, Vol. 7, No. 4, pp. 200277, 2020.
- [15] Du, G., and Sun, M., “Effects of Unsteady Deformation of Flapping Wing on Its Aerodynamic Forces,” *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 29, No. 6, pp. 731-743, 2008.
- [16] Du, G., and Sun, M., “Effects of Wing Deformation on Aerodynamic Forces in Hovering Hoverflies,” *Journal of Experimental Biology*, Vol. 213, No. 13, pp. 2273-2283, 2010.

- [17] Yin, B., and Luo, H., “Effect of Wing Inertia on Hovering Performance of Flexible Flapping Wings,” *Physics of Fluids*, Vol. 22, No. 11, pp. 111902, 2010.
- [18] Kang, C.-k., and Shyy, W., “Scaling Law and Enhancement of Lift Generation of an Insect-Size Hovering Flexible Wing,” *Journal of the Royal Society Interface*, Vol. 10, No. 85, pp. 20130361, 2013.
- [19] Miller, L. A., and Peskin, C. S., “Flexible Clap and Fling in Tiny Insect Flight,” *Journal of Experimental Biology*, Vol. 212, No. 19, pp. 3076-3090, 2009.
- [20] Shoele, K., and Zhu, Q., “Performance of a Wing with Nonuniform Flexibility in Hovering Flight,” *Physics of Fluids*, Vol. 25, No. 4, pp. 041901, 2013.
- [21] Huang, W. X., Shin, S. J., and Sung, H. J., “Simulation of Flexible Filaments in a Uniform Flow by the Immersed Boundary Method,” *Journal of computational physics*, Vol. 226, No. 2, pp. 2206-2228, 2007.
- [22] Wang, Z. J., Birch, J. M., and Dickinson, M. H., “Unsteady Forces and Flows in Low Reynolds Number Hovering Flight: Two-Dimensional Computations Vs Robotic Wing Experiments,” *Journal of Experimental Biology*, Vol. 207, No. 3, pp. 449-460, 2004.
- [23] Herrmann, L., “Vibration of the Euler-Bernoulli Beam with Allowance for Dampings,” *Proceedings of the Word Congress on Engineering*, London, pp. 901-904, 2008.
- [24] San Ha, N., Truong, Q. T., Goo, N. S., Park, H. C., and biomimetics, “Relationship between Wingbeat Frequency and Resonant Frequency of the Wing in Insects,” *Bioinspiration*, Vol. 8, No. 4, pp. 046008, 2013.
- [25] Kuethe, A. M., Foundations of Aerodynamics: Bases of Aerodynamic Design, New York, Wiley, Chap. 5, pp. 156-164, 1976.
- [26] Zanker, J., and Götz, K., “The Wing Beat of *Drosophila Melanogaster*. Ii. Dynamics,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. B, Biological Sciences*, Vol. 327, No. 1238, pp. 19-44, 1990.