

使用 EXCEL 建構近似射表標準空氣數值之彈道模組

作者：林政諭

提要

- 一、為何要使用 EXCEL 建構彈道模組？第一乃是因為射表所提供資訊不足，使吾人無法瞭解任何角度、時間點及砲目距離下之砲彈飛行軌跡，舉例說明：射表僅記載各號裝藥每 500 公尺水平距離之最大彈道高度，卻未說明最大彈道高發生於何時及何處之水平距離，因此便無法確保在此砲目距離內之障礙物是否造成射擊死界，若可建構近似射表數值之彈道模組，此問題便可迎刃而解，因為彈道模組將彈道具體化，使後續探討射彈修正、射擊諸元計算，甚至彈道計算機之概念均具體可行；第二 EXCEL 是每台電腦幾乎都有的文書處理程式，因此筆者將於本研究中以最簡易之方式推算標準空氣狀況下之彈道計算原理，並且提供 EXCEL 程式所需函數及公式，供有需求之單位研究及指教。
- 二、在標準空氣狀況下，彈體從出砲口開始，便時時刻刻受到空氣阻力影響直到落彈，舉如阻力係數、空氣密度、彈體截面積、相對速度、物體質量、重力加速度、仰度、初速，甚至力矩等均為影響計算結果之變因，而這些變因之正確參數，正是「逆向工程」所遭遇之最大困難，我們僅能從射表及準則中找尋是否有可供參考之數據，儘可能客觀的「假設」產製射表時是使用這些參數數值。
- 三、射擊試驗參數往往被火砲產製國家列為機密而無法得知，在基礎彈道學原理已普遍被探索之情況下，藉由「逆向工程」反推試驗參數，僅能達到「近似」參數值，而非真實試驗數值，而且推算過程非常耗時，因此未來在採購國外新式火砲時，希望火砲產製國家不僅提供射表，尚能提供相關射擊參數。
- 四、筆者在過往教學及輔訓實務經驗中，常需針對射彈修正後所產生之結果實施解說，然而卻發現所產生之結果往往僅是推論而無具體之參考依據，因此筆者希望藉由建構 EXCEL 彈道模組，將彈道飛行軌跡及數據具體化，作為輔助教學之工具，使學者更容易一窺彈道學原理。
- 五、筆者希望藉由本研究論述表達基礎彈道學原理，因為彈道計算機之概念便是建構於此，若可激發共鳴達到拋磚引玉之效果，相信可使彈道模組之功能與運用更加完善。

關鍵詞：彈道學、彈道模組、彈道計算機

前言

國家教育研究院力學名詞辭典中「射表」(Firing table)之名詞解釋為「顯示標準空氣狀況與非標準空氣狀況下，火炮對目標行精確射擊所需諸元之圖表」，而「標準空氣狀況」¹並非指真空中狀況，乃是指在彈道學中常使用假定空氣密度、溫度及靜止之空氣狀況，此法可固定火炮與目標之間的射擊變數，為射表理論諸元計算之基準，如 B 表、F 表內第 1、2、5、7、10、11、18、19 欄、G 表內第 1、7 至 12 欄等參數，均以理論計算所得數值為基礎，再藉由射擊試驗實施小量修正，其他表次及欄位則是將標準空氣狀況所產生之射擊諸元予以修正，以符合於非標準空氣狀況下射擊之現象，如地球自轉、氣象、發射藥溫影響等，因此射表製表基礎便在於計算標準空氣狀況下之理論數值，也是筆者探討重點，非標準空氣狀況之參數不在本研究討論範圍。

然而，為何要使用 EXCEL 建構彈道模組？第一乃是因為射表所提供資訊不足，雖然於射表附件有繪製各號裝藥每 100 密位仰度之彈道曲線圖，仍然使吾人無法瞭解任何角度、時間點及砲目距離下之砲彈飛行軌跡，舉例說明：射表僅記載各號裝藥每 500 公尺水平距離之最大彈道高度，卻未說明最大彈道高發生於何時及何處之水平距離，因此便無法確保在此砲目距離內之障礙物是否造成射擊死界(圖 1)，若可建構近似射表數值之彈道模組，此問題便可迎刃而解，因為彈道模組將彈道具體化，使後續探討射彈修正、射擊諸元計算，甚至彈道計算機之概念均具體可行；第二 EXCEL 是每台電腦幾乎都有的文書處理程式，因此筆者將於本研究中以最簡易之方式推算標準空氣狀況下之彈道計算原理，並且提供 EXCEL 程式所需函數及公式，供有需求之單位研究及指教。

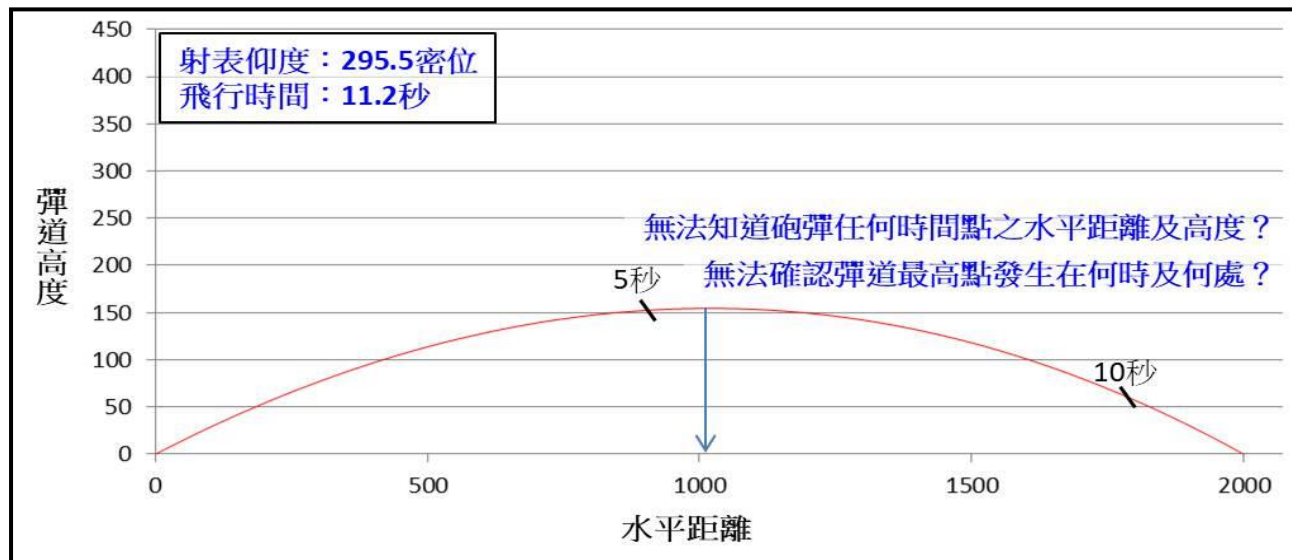


圖 1 105 榴彈砲射表(第 7 版) 1 號裝藥、距離 2000 公尺之彈道曲線示意圖

資料來源：筆者使用自製 EXCEL 彈道模組所繪製

¹ 《陸軍野戰砲兵觀測訓練教範(第二版)》(桃園：國防部陸軍司令部，民國 99 年 11 月 10 日)，頁 3-10。

受空氣阻力影響下之彈體拋射運動

真空中彈道射角等於落角、初速等於末速、彈道升弧等於降弧、彈道最高點發生於水平位移量之正中間、上升時間等於下降時間、水平速度（ V_x ）為一不變之常數值、鉛直速度（ V_y ）僅受重力影響（圖 2），而彈體受空氣阻力影響後所產生之現象，筆者採條列式之方式概略說明如下：²

- 1、水平速度（ V_x ）逐漸降低，不再為一常數值。
- 2、鉛直速度（ V_y ）亦同樣受空氣阻力影響。
- 3、彈道最高點接近落點。
- 4、落速小於初速。
- 5、落角大於射角。
- 6、降落時間較上升時間長。
- 7、彈體飛行之水平距離較真空中彈道短。

確實瞭解完真空與標準空氣彈道之差異性後，便可進一步的開始思考兩者之間實際差異數值為何？筆者於本研究中將採用「拋射體運動」及「微積分」兩種方式計算，以兩者所得結果相互比對，並驗證推導過程是否正確。

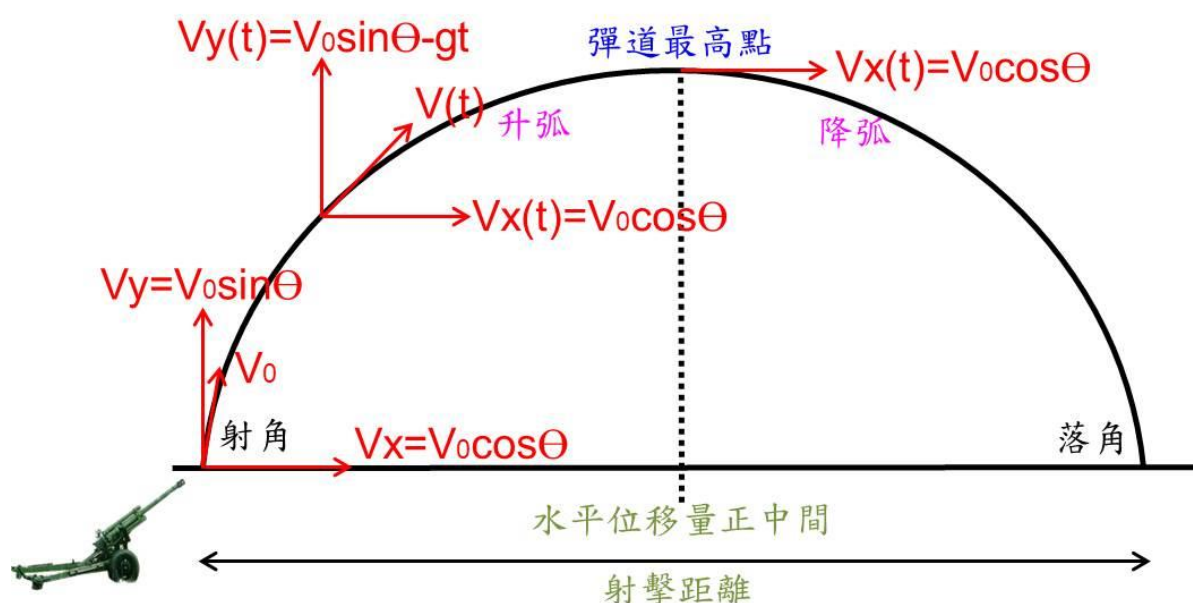


圖 2 真空中彈道示意圖

資料來源：筆者自繪

一、拋射體運動計算法

無論是否受空氣阻力影響，拋射體運動軌跡均建立在斜向拋射（拋射體由下往上運動階段）及水平拋射（拋射體到達頂點後做自由落體運動）物理公式

²同註 1，頁 3-11。

上，以此公式再加上流體力學中「阻力」³之觀念，較為讓人容易理解，並將速度、加速度、阻力及位移量分解成水平與鉛直之概念個別計算，可簡化計算過程，筆者將本研究所運用到的拋射體公式整理如下：

1、彈體出砲口瞬間之水平初速： $V_{x(0)} = V_{(0)} \cdot \cos \Theta$ 。（ $V_{(0)}$ 為初速、 Θ 為火砲仰角）

2、彈體出砲口瞬間之鉛直初速： $V_{y(0)} = V_{(0)} \cdot \sin \Theta$ 。

3、從 t 至 $t+\Delta t$ 秒後之速度： $V_{(t+\Delta t)} = V_{(t)} + a_{(t)} \cdot \Delta t$ 。（ Δt 為時間間隔）

4、從 t 至 $t+\Delta t$ 秒後之水平速度： $V_{x(t+\Delta t)} = V_{x(t)} + a_{x(t)} \cdot \Delta t$ 。

5、從 t 至 $t+\Delta t$ 秒後之鉛直速度： $V_{y(t+\Delta t)} = V_{y(t)} + a_{y(t)} \cdot \Delta t$ 。（數值為正代表彈體上升、數值為負代表彈體下降）

6、從 t 至 $t+\Delta t$ 秒水平位移量： $X_{(t+\Delta t)} = X_{(t)} + V_{x(t)} \cdot \Delta t + 1/2 \cdot a_{x(t)} \cdot \Delta t^2$ 。（加速度公式 $X = V_{(0)}t + 1/2 \cdot at^2$ ）

7、從 t 至 $t+\Delta t$ 秒鉛直位移量： $Y_{(t+\Delta t)} = Y_{(t)} + V_{y(t)} \cdot \Delta t + 1/2 \cdot a_{y(t)} \cdot \Delta t^2$ 。

而加速度部分就必須帶入「阻力」公式來說明了，首先阻力公式表示方式為：

$$F_d = \frac{C_d \times \rho \times A \times V^2}{2}$$

F_d 為阻力

C_d 為阻力係數

ρ 為空氣密度

A 為飛行方向之最大彈體截面積

V 為彈體與空氣之相對速度

當運動中物體質量不變時，可使用牛頓第二定律⁴之表述「物體所受到的外力等於質量與加速度之乘積，而加速度與外力同方向」，以方程式表達即「 $F=ma$ 」， F 為合力、 m 為物體質量並非重量、 a 為加速度，再與阻力公式結合便可得加速度公式如下：

$$F_d = \frac{C_d \times \rho \times A \times V^2}{2} = ma ; a = \frac{C_d \times \rho \times A \times V^2}{2m}$$

既然速度與位移量都已分解成水平與鉛直兩部分，加速度亦須以此概念來探討，水平方向之加速度較為簡單可表示如下：

³阻力（又稱後曳力或流體阻力），是物體在流體中相對運動所產生與運動相反的力。<https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/阻力>，2020 年 9 月 21 日。

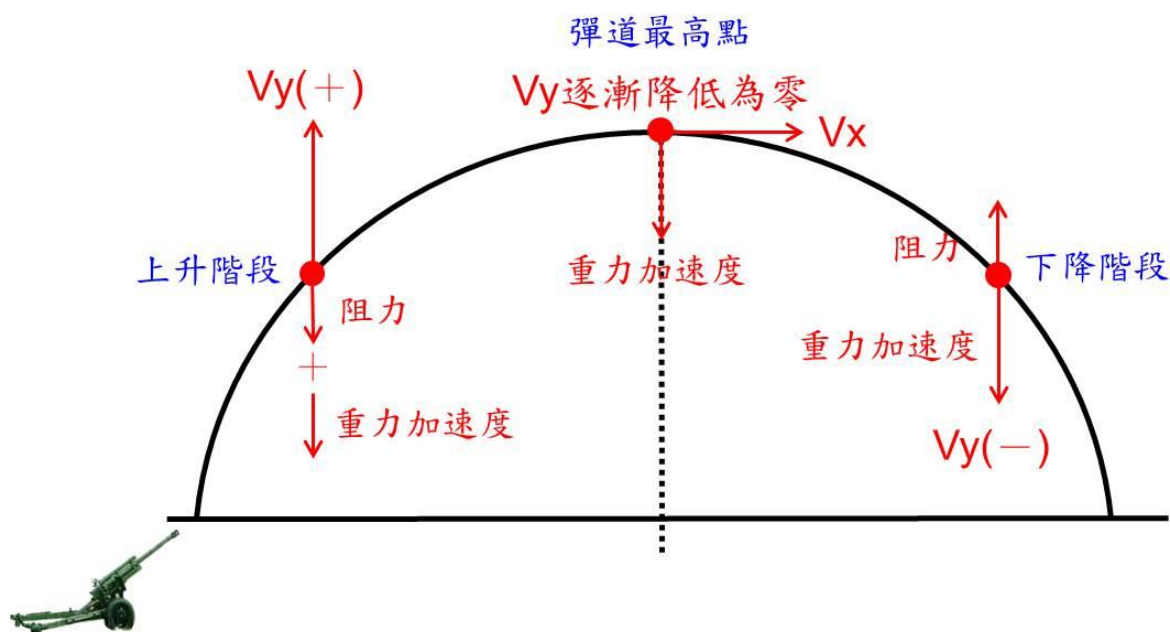
⁴牛頓第二運動定律（Newton's second law of motion），物體所受外力等於質量與加速度之乘積，而加速度與外力同方向。〈<https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/牛頓第二運動定律>〉，2020 年 4 月 27 日。

$$a_x = - \left(\frac{C_{dx} \times \rho \times A \times V_x^2}{2 m} \right)$$

由於阻力是與物體運動方向相反之力，彈體的水平速度（ V_x ）逐漸降低，不再為一常數值，因此水平方向加速度必須帶入負值；而鉛直方向之加速度區分上升及下降兩階段說明，上升階段彈體受到阻力及重力相加共同向下之力，彈體的鉛直速度（ V_y ）亦逐漸降低直至為零時，則彈體到達彈道最高點，上升階段鉛直方向加速度為負值，此後彈體以水平拋射自由落體方式開始下降階段，因受重力加速度向下之力關係，彈體的鉛直速度（ V_y ）便由零逐漸增多，下降階段鉛直方向加速度為正值，然而阻力與彈體運動方向相反，導致減少了重力加速度影響彈體之作用力（如圖三），若彈體下降時間夠長，在某個時間點時，向下之重力會等於向上之阻力，此時彈體淨力為零，下降速度便會保持不變，而達到「終端速度」⁵，依圖示鉛直方向之加速度表示如下：

$$a_y = -g - \left(\frac{C_{dy} \times \rho \times A \times V_y^2}{2 m} \right) \quad \text{上升階段}$$

$$a_y = g - \left(\frac{C_{dy} \times \rho \times A \times V_y^2}{2 m} \right) \quad \text{下降階段}$$



圖三 鉛直方向加速度示意圖

資料來源：筆者自繪

⁵終端速度，當向下之重力（ F_g ）相等於向上的阻力（ F_d ），自由落體中的物體會達到終端速度，此時物體的淨力為 0，物體的速度保持不變。〈<https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/終端速度>〉，2019 年 11 月 9 日。

現在我們再將水平跟鉛直方向加速度公式帶入水平跟鉛直方向速度及位移量公式內，即可得到完整之計算式如下，將各式完整列出，可方便後續寫入 EXCEL 內運算之公式：

$$V_{x(t+\Delta t)} = V_{x(t)} + \left[- \left(\frac{C_{dx} \times \rho \times A \times V_{x(t)}^2}{2 m} \right) * \Delta t \right] \text{ 水平速度}$$

$$V_{y(t+\Delta t)} = V_{y(t)} + \left\{ \left[-g - \left(\frac{C_{dy} \times \rho \times A \times V_{y(t)}^2}{2 m} \right) \right] * \Delta t \right\} \text{ 上升階段鉛直速度}$$

$$V_{y(t+\Delta t)} = V_{y(t)} + \left\{ \left[g - \left(\frac{C_{dy} \times \rho \times A \times V_{y(t)}^2}{2 m} \right) \right] * \Delta t \right\} \text{ 下降階段鉛直速度}$$

$$X(t+\Delta t) = X(t) + V_{x(t)} * \Delta t + \left[\frac{1}{2} * - \left(\frac{C_{dx} \times \rho \times A \times V_{x(t)}^2}{2 m} \right) * \Delta t^2 \right] \text{ 水平位移量}$$

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + V_{y(t)} * \Delta t + \left\{ \frac{1}{2} * \left[-g - \left(\frac{C_{dy} \times \rho \times A \times V_{y(t)}^2}{2 m} \right) \right] * \Delta t^2 \right\} \text{ 上升階段鉛直位移量}$$

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + V_{y(t)} * \Delta t + \left\{ \frac{1}{2} * \left[g - \left(\frac{C_{dy} \times \rho \times A \times V_{y(t)}^2}{2 m} \right) \right] * \Delta t^2 \right\} \text{ 下降階段鉛直位移量}$$

至此，計算所用到的公式均已完整列出，而在所列舉之計算式中均可看見 $(t+\Delta t)$ 字樣，此字樣所代表意思為「計算在極短時間區間內，物體的速度、加速度及位移量」，當 Δt 越小所得計算數值誤差便會越小，並且將每一計算結果累加後，即可得到近似理論數值之彈道數據（圖 4），亦是本段落論述之基礎。

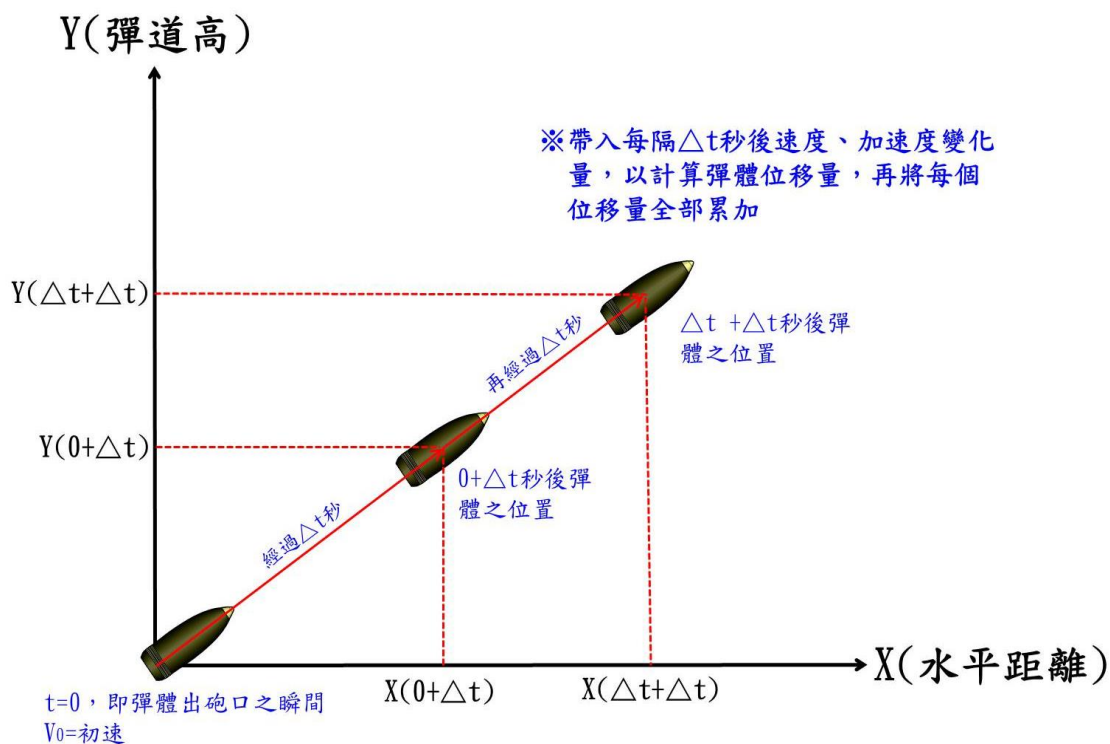


圖 4 計算拋射體在極短時間內位移量示意圖

資料來源：筆者自繪

在標準空氣狀況下，彈體從出砲口開始，便時時刻刻受到空氣阻力影響直到落彈，雖然我們已經列舉各項計算公式，但是舉如阻力係數、空氣密度、彈體截面積、相對速度、物體質量、重力加速度、仰度、初速，甚至力矩等均為影響計算結果之變因，若未知變因數過多，將使推導及計算過程十分複雜，因此我們必須找出這些變因的參數值，目的是為了要產生理論計算之數值，而這些變因之正確參數，正是「逆向工程」所遭遇之最大困難，我們僅能從射表及準則中找尋是否有可供參考之數據，並且「假設」產製射表時是使用這些參數，接下來便逐一探討上述變因之數值。

1、初速、相對速度：各式火砲射表內均可查到在標準砲管下每一號裝藥所產生之初速，如 105 榴砲射表-第 6 版一號裝藥初速為每秒 640 英尺，若以公制為單位（1 公尺等於 3.2808399 英尺）換算後初速為每秒 195.098218 公尺，而在 105 榴砲射表-第 7 版已將初速單位由英制轉為公制，並紀錄為每秒 195.1 公尺；105 榴砲射表-第 6 版二號裝藥初速為每秒 695 英尺，換算公制為每秒 211.836 公尺，而第 7 版射表紀錄為每秒 211.8 公尺，因此我們便可認為射表中所列無論初速、仰度、時間等各式計算數值，均應為四捨五入後之數值，此假設於後續計算時便可得到驗證，而標準空氣便是假設無風之狀況，砲管則為無初速誤差之標準砲管，因此砲彈相對於空氣之速度即為射表所提供各號裝藥之初速。

2、空氣密度：在陸軍野戰砲兵觀測訓練教範（第二版）第 3-35 頁中，說明射表中之標準彈道，係根據下列假定「海水準面標準之空氣密度為每立方公尺 1.225 公斤」⁶計算得之，因此便可將公式中「 ρ 」之數值固定為 1.225 kg/m³。

3、重力加速度⁷：地表附近的所有物體下降的加速度都介於 9.78 m/s² 至 9.83 m/s² 之間，差別則取決於緯度及距地心之距離等因素，位於赤道數值最小、南北極數值最大，然而射表內並無法查到正確參數，僅在第 1 頁中說明火砲是在美國馬里蘭州阿保登試射場射擊，馬里蘭州位於北緯 37 度至 39 度之間，依重力加速度近似公式計算馬里蘭州重力加速度約 9.8 m/s²，而國際標準重力加速度為 9.80665 m/s²，由於無法確認採用何數據，為固定其值將公式中「g」之數值採四捨五入方式假設為 9.81 m/s²。

4、物體質量⁸：牛頓第二運動定律公式中「m」為質量而非重量，質量與重

⁶同註 1，頁 3-35。

⁷重力加速度，是一個物體僅受重力作用的情況下所具有的加速度，近似公式 $9.78046 (1 + 0.0052884 \sin^2 \text{緯度} - 0.0000059 \sin^2 2 \text{倍緯度}) - 0.000003086 \times \text{海拔高度}$ 。維基百科，〈<https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/重力加速度>〉，2020 年 2 月 21 日。

⁸質量，用來描述物理學中物質的絕對量。維基百科，〈<https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/質量>〉，2020 年 7 月 14 日。

量無論在定義或單位上均不同，質量在任何地方數值均不會改變，重量則會因為在不同地方受到不同重力而有所改變，量測物體質量並不困難，以古老的方法便是使用天秤，因為在天秤兩端之物體受地球重力影響相同，量測數值便為物體質量，因此筆者認為射表所列標準彈重即彈體質量，查閱 105 榴砲射表標準彈重為 33 磅重，以公制為單位（1 磅等於 0.45359237 公斤）換算後為 14.96854821 公斤重，公式中「m」之數值便可固定為 14.96854821 公斤重（Kg · Weight）。

5、彈體截面積⁹：截面是指一個在三維空間下的物體和一平面相交所產生之交集，截面的面積即為截面積，而彈體飛行軌跡中會有 X 軸（水平距離）及 Y 軸（彈道高度）兩軸的相應截面積，且因拋射體運動軌跡關係，每個時刻對應兩軸之截面積均不相同，此數值亦未記載於準則或射表中，為求客觀，筆者採用了北京科學出版社王中原所著「外彈道設計理論與方法」第一章第 8 頁說明「彈體截面積通常取彈體面對運動方向之最大截面積」¹⁰，而假設彈體從發射至落彈均能穩定朝向運動方向，則從運動方向朝向彈體觀看，便是一個圓形，圓面積計算公式為 $\pi * \text{半徑}^2$ ，射表中記載 M2A1 式 105 榴砲陽膛線直徑 4.134 英吋、陰膛線直徑 4.194 英吋，105 公厘榴彈彈體含彈帶直徑必介於此兩者之間，為固定數值，便取其中間值為 4.164 英吋，以公制為單位（1 吋等於 2.54 公分、0.0254 公尺）換算後直徑為 0.1057656 公尺、半徑為 0.0528828 公尺，再計算其截面積，公式中「A」之數值便可固定為 0.008785748 m²。

6、力矩：當彈體在飛行中其彈體縱軸與飛行方向未能重合時，兩者便會出現一夾角，此夾角稱為「偏角」¹¹，在計算射表基礎諸元時，通常會將彈體視為一質點，並假設其偏角非常小，小至可忽略力矩對彈道軌跡之影響，因為偏角不等於 0 時，彈體周圍的壓力就會出現不對稱分佈，其壓力中心會與彈體縱軸相交於某處，若此彈體受地心引力之重心與壓力中心不重疊，即會產生力矩而使砲彈飛行產生不穩定之狀況，如果壓力中心在重心前方就會產生翻轉力矩（如圖五），而為了力求將偏角減至最小限度，便須賦予彈體高速旋轉之力，再對此旋轉力產生之偏差予以修正，即為「偏流」¹²修正，因此可觀察上述所列公式中，在計算質點彈道理論數值時，並無關於力矩之參數項。

⁹截面，為一幾何名詞，指一個在三維空間下的物體和一平面相交所產生之交集，截面的面積即為截面積。〈<https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/截面>〉，2019 年 4 月 21 日。

¹⁰王中原、周衛平，《外彈道設計理論與方法》（北京：科學出版社，2004 年 9 月），頁 1-8。

¹¹同註 1，頁 3-36。

¹²同註 1，頁 3-42。

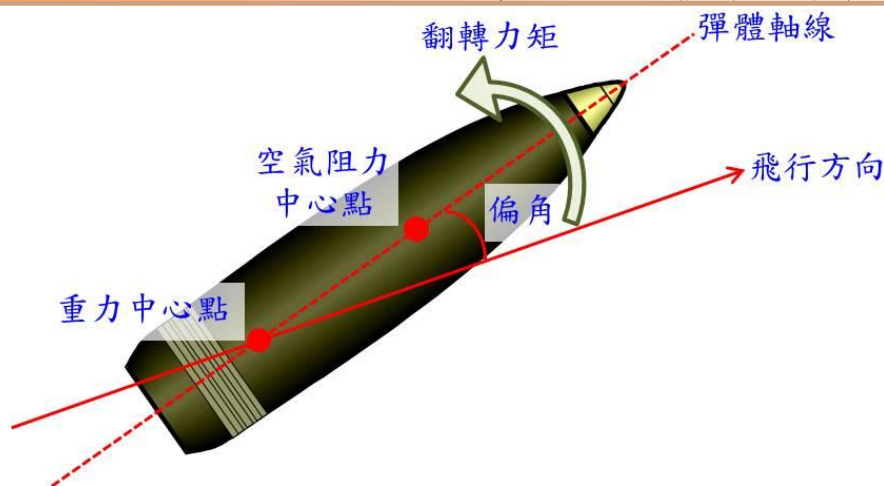


圖 5 彈體軸線與飛行方向不重合時之翻轉力矩示意圖

資料來源：筆者自繪

7、阻力係數：阻力係數對於計算彈道軌跡至關重要，而射表或準則中並未記載各號裝藥、各式彈藥之阻力係數，目前可於射表各號裝藥的第 1 頁查詢到「彈道係數」之數值，而彈道係數¹³乃為以該彈丸克服空氣阻力之能力與所假定標準彈丸克服空氣阻力之能力相比較所得之值，陸軍野戰砲兵觀測訓練教範（第二版）第 3-39 頁中亦列出彈道係數影響阻力之公式如下：

$$\text{減速力 (阻力)} = \frac{\text{阻力係數(Cd)} \times \text{空氣密度}(\rho) \times \text{相對速度之平方}(V^2)}{\text{彈道係數}}$$

由公式可以理解較高之彈道係數會降低計算所得到的阻力值，阻力降低便會增加飛行距離，彈道係數為低時則相反，筆者參考北京國防工業出版社由嚴章庚及祁戴康所著「射表技術」第二章第 20 頁中說明「彈道係數」公式如下：

$$\text{彈道係數} = \frac{(\text{彈體自身阻力係數}/\text{標準彈體阻力係數}) \times \text{彈徑} \times 10^3}{\text{彈重}}$$

而彈道學家早已製訂許多標準彈型之阻力係數，因之使彈道之研究工作簡化甚多，當某一彈型與標準彈型稍有差別時，則將其「彈型因數」¹⁴帶入彈道係數公式中，即可求得其概略阻力係數；我們在先前已先探討過影響彈道計算之各參數項，並將相對速度(V)、空氣密度(ρ)、重力加速度(g)、物體質量(m)、彈體截面積(A)等各項參數固定或假設，而「逆向工程」最困難之處，在於我們僅能有限度地推論各項參數值，若與真實參數有所不同，計算誤差便會反應在尚未假設或固定的「阻力係數」上，並且使最終之結果與射表數值有所差異，這也是本文為何以「近似」射表為題之原因，而「逆向工程」最大的好處即是在於有了所有數值的「結論」，因此後續計算所推導出來的阻力係數雖有誤差，

¹³同註 1，頁 3-38。¹⁴同註 1，頁 3-36。

但仍能使最終計算數值近似於射表數值，最後阻力係數亦應分成X及Y軸分量，並瞭解阻力係數與射彈飛行速度之間的概略關係即可（圖6），可幫助我們後續推導阻力係數時有所參考。

阻力係數

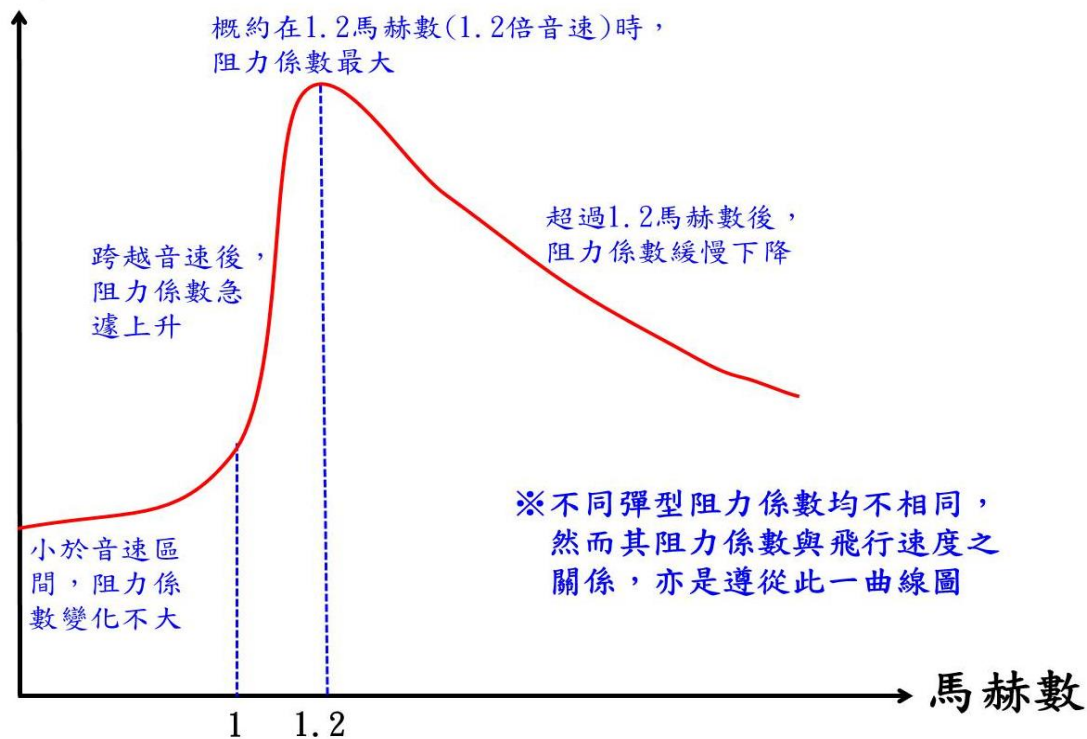


圖6 阻力係數與彈體飛行速度關係示意圖

資料來源：1.嚴章庚及祁戴康所著《射表技術》（北京：國防工業出版，2000年1月），頁2-17。2.筆者整理自繪

二、微積分計算法

由前段論述可知受空氣阻力影響下之彈體無論速度、加速度、位移量均非一常量，而為變量，微積分便是處理變量的數學方法，把一完整彈道之速度及時間函數分割成非常多等分之概念便是微分，再將每一等分之面積全數相加即可得到位移量之概念便是積分，並確定自變數及應變數的參數項目，在彈道計算中，「時間」便是最好的自變數，只要彈體一離開砲管，時間就會開始累積，速度、加速度及位移量均會隨著時間累積而改變，與拋射體運動公式計算邏輯相同，都是在探討極短時間內之速度變化量所產生的結果，然而筆者在微積分推導過程中參閱了非常多參考資料，¹⁵主要是變數變換之概念，還有對那些參數項微分及積分較為複雜，但是微積分導算結果絕對有其價值，因為為使拋射體運動軌跡計算結果符合足夠之精度， Δt 至少須為千分之一秒（0.001秒），再以EXCEL彈道模組運算每個 Δt 時之速度、加速度及位移量，一個完整彈道軌跡所得數據通常為數十萬筆甚至百萬筆，而運用微積分所導算出來的公式，可以

¹⁵本段推導過程及結果最主要參考資料為中興大學機械工程研究所-熱流系統設計與分析-第四章-外流場之課程內容。

迅速求得飛至彈道最高點之時間、彈道最高點高度、降落時間、總飛行時間及水平飛行距離等數值，便可以其結果於大數據庫中快速比對，筆者現在便是以微積分導算結果所得之值與前段計算結果相比較，以驗證前段論述及計算結果是否正確，微積分計算教學及法則並非本文欲探討之重點，本段落接下來僅會列出大概之推導過程及結果，提供有興趣或更有研究、更佳見解之先進指教，不懂微積分計算之讀者亦可直接使用最後導算出來公式（黃底紅字）求取各值：

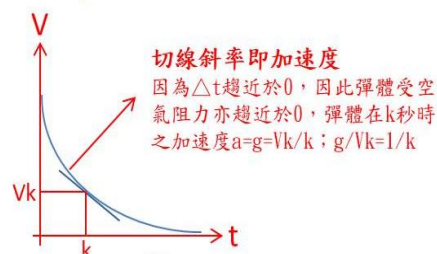
$$F = ma = - \left(mg + \frac{C_d \times \rho \times A \times V^2}{2} \right) = m \frac{dv}{dt} \quad \text{兩邊同除 } m$$

$$\text{終端速度 } V_k = \sqrt{\frac{2mg}{C_d \times \rho \times A}} \quad V_k^2 = \frac{2mg}{C_d \times \rho \times A} \quad \frac{1}{V_k^2} = \frac{C_d \times \rho \times A}{2mg}$$

$$\frac{dv}{dt} = - \left(g + \frac{C_d \times \rho \times A \times V^2}{2m} \right) \quad \text{變數變換 兩邊同乘 } \frac{2m}{C_d \times \rho \times A}$$

$$\frac{2m}{C_d \rho A} \frac{dv}{dt} = - \left(\frac{2mg}{C_d \rho A} + V^2 \right) \quad \text{將兩邊移項}$$

$$\frac{dv}{V^2 + \frac{2mg}{C_d \rho A}} = - \frac{C_d \rho A}{2m} dt \quad \rightarrow \quad g \times \frac{1}{V_k} = \frac{C_d \rho A}{2mg} \times g$$



$$\frac{dv}{V^2 + V_k^2} = - \frac{g}{V_k^2} dt \quad \text{同乘 } V_k \Rightarrow \frac{V_k \times dv}{V^2 + V_k^2} = - \frac{g}{V_k} dt$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{V}{V_k}\right)^2} d\left(\frac{V}{V_k}\right) = - \frac{1}{k} dt \quad \text{帶入積分法則 } \int \frac{1}{1 + X^2} dx = \arctan x + C$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{V}{V_k}\right) = - \frac{t}{k} + C \quad C \text{ 為不定積分常數 當 } t=0, V=\text{初速}=V_0, C = \tan^{-1}\left(\frac{V_0}{V_k}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{V}{V_k}\right) = - \frac{t}{k} + \tan^{-1}\left(\frac{V_0}{V_k}\right)$$

$$\frac{V}{V_k} = \tan \left[-\frac{t}{k} + \tan^{-1} \left(\frac{V_0}{V_k} \right) \right] \quad \text{當砲彈至最高點時 } V=0$$

$$\tan^{-1} \left(\frac{V_0}{V_k} \right) - \frac{t}{k} = 0 \quad \text{移項}$$

$$t_{\text{升}} = k_y \cdot \tan^{-1} \left(\frac{V_{y0}}{V_{yk}} \right) \quad \text{此為彈道至最高點之時間} \quad \frac{V_{yk}}{k_y} = g \quad k_y = \frac{V_{yk}}{g} \quad V_{yk} = \sqrt{\frac{2mg}{C_{dy} \times \rho \times A}}$$

$$\frac{V}{V_k} = \tan \left[-\frac{t}{k} + \tan^{-1} \left(\frac{V_0}{V_k} \right) \right] \quad \text{帶入兩角和公式 } \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\frac{\frac{V_0}{V_k} - \tan \frac{t}{k}}{1 + \frac{V_0}{V_k} \tan \frac{t}{k}} \quad \text{分子、分母同乘 } V_0 \quad A = \tan^{-1} \left(\frac{V_0}{V_k} \right) \quad B = \frac{t}{k}$$

$$= \frac{\frac{V_0^2}{V_k} - V_0 \tan \frac{t}{k}}{\left(1 + \frac{V_0}{V_k} \tan \frac{t}{k} \right) V_0} = \frac{\left(\frac{V_0^2}{V_k} + V_k \right) - \left(V_k + V_0 \tan \frac{t}{k} \right)}{\left(1 + \frac{V_0}{V_k} \tan \frac{t}{k} \right) V_0}$$

$$= \frac{\left(\frac{V_0}{V_k} + \frac{V_k}{V_0} \right) V_0 - V_k \left(1 + \frac{V_0}{V_k} \tan \frac{t}{k} \right)}{\left(1 + \frac{V_0}{V_k} \tan \frac{t}{k} \right) V_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{b \cdot c - a \cdot d}{a \cdot c}$$

$$= \frac{\left(\frac{V_0}{V_k} + \frac{V_k}{V_0} \right)}{1 + \frac{V_0}{V_k} \tan \frac{t}{k}} - \frac{V_k}{V_0} \quad \text{將本項積分}$$

$$a = 1 + \frac{V_0}{V_k} \tan \frac{t}{k}$$

$$b = \left(\frac{V_0^2}{V_k} + V_k \right) / V_0 = \frac{V_0}{V_k} + \frac{V_k}{V_0}$$

$$c = V_0$$

$$d = V_k$$

$$\int \frac{\left(\frac{V_0}{V_k} + \frac{V_k}{V_0} \right)}{1 + \frac{V_0}{V_k} \tan \frac{t}{k}} d \left(\frac{t}{k} \right)$$

帶入積分法則

$$\int \frac{1}{a + b \tan x} d(x)$$

$$= \frac{ax + b \cdot \ln(a \cos x + b \sin x)}{a^2 + b^2}$$

$$a=1 \quad b = \frac{V_0}{V_k} \quad x = \frac{t}{k}$$

$$\left(\frac{V_0}{V_k} + \frac{V_k}{V_0} \right) x \frac{\frac{t}{k} + \left(\frac{V_0}{V_k} \right) \ln \left(\cos \frac{t}{k} + \frac{V_0}{V_k} \sin \frac{t}{k} \right)}{1 + \left(\frac{V_0}{V_k} \right)^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{V_0^2 + V_k^2}{V_0 \cdot V_k} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\frac{V_0^2 + V_k^2}{V_k^2}}$$

$$\frac{V_k}{V_0} \times \left[\frac{t}{k} + \left(\frac{V_0}{V_k} \right) \ln \left(\cos \frac{t}{k} + \frac{V_0}{V_k} \sin \frac{t}{k} \right) \right]$$

$$\text{最大彈道高 } H = \int V \, dt = V_k * k \int \frac{V}{V_k} d \left(\frac{t}{k} \right) \quad \text{帶入積分結果}$$

$$= V_{yk} * k_y * \ln \left(\cos \frac{t_{\text{升}}}{k_y} + \frac{V_{y0}}{V_{yk}} \sin \frac{t_{\text{升}}}{k_y} \right)$$

至此為彈體飛至彈道最高點時間及最大彈道高度之公式，後續僅要導出彈體從彈道最高點至落點的自由落體時間，加上飛至彈道最高點時間即可得到完整飛行時間，再由完整飛行時間便可推導出水平飛行距離，後續計算仍為變數變換及積分法則之概念，筆者不再列出推導過程，僅列出最終推導公式：

$$\text{自由落體時間 } t_{\text{落}} : V_{yk} * k_y * \ln \left[\cosh \left(\frac{t_{\text{落}}}{k_y} \right) \right] = H \quad ; \text{帶入 } H \text{ 值反求 } t_{\text{落}}$$

$$\text{總飛行時間 } T = t_{\text{升}} + t_{\text{落}}$$

$$\text{水平飛行距離 } L = V_{xk} * k_x * \ln \left(1 + \frac{V_{x0} * T}{V_{xk} * k_x} \right)$$

※鉛直及水平方向之各數
值均應分別求取

由於筆者已將拋射體運動公式寫入 EXCEL 內由電腦計算，因此便可假設一狀況，以比對此兩種計算方法之結果，使用 105 榴彈砲射表（第 7 版）1 號裝藥為例，各項參數設定如下，並將各項參數值分別帶入計算式所得結果如表 1：

- 1、射表初速 $V_0 = 195.0719997$ 。
- 2、射表仰度 $\Theta = 295.5$ ；射表距離=2000；射表時間=11.2；射表彈道高=154。
- 3、空氣密度 $\rho = 1.225$ 。
- 4、重力加速度 $g = 9.81$ 。
- 5、砲彈截面積 $A = 0.008785748$ 。
- 6、105 榴彈彈體質量 $m = 14.96854821$ 。
- 7、時間間隔 $\Delta t = 0.001$ 。
- 8、阻力係數 $C_{dx} = 0.132$ ； $C_{dy} = 0.4838$ 。

表 1 微積分、拋射體運動計算結果與 105 榴砲射表數值對照統計表

	射表數值	微積分 計算值	拋射體運 動計算值	與微積分計算結 果之誤差百分比
飛至彈道最高點時 間（ $t_{\text{升}}$ ，秒）	射表查 無資料	5.586854063	5.587	+0.0026%

最大彈道高 (H, 公尺)	154	154.4780093	154.477015	-0.0006437%
自由落體時間 (t 落, 秒)	射表查 無資料	5.637114316	5.637	-0.00203%
總飛行時間 (T, 秒)	11.2	11.22396838	11.224	+0.0002817%
水平飛行距離 (L, 公尺)	2000	2000.0058509	2000.010436	+0.0002293%

資料來源：筆者自行整理

由上表可見使用兩種不同計算方法，帶入相同之參數值，所得結果幾乎相同，因此可證明前段論述正確可行，另外再將計算結果與射表距離 2000 公尺、射表時間 11.2 秒、射表彈道高 154 公尺相比較，可發現射表所列數值均為計算結果四捨五入後之數值。

使用 EXCEL 建構彈道模組

前段已證明拋射體運動公式計算論述正確可行，後續便是將各式公式寫入 EXCEL 內，由電腦來處理龐大的計算成果，然而 EXCEL 公式及函數語法規則並非本文闡述重點，本文僅會列出每個數值欄位之函數，供欲自製本模組之人員可直接複製函數語法，若對 EXCEL 使用上有一定程度了解的人，便可以快速完成此彈道模組而無需自行摸索，另對 EXCEL 有研究者則可改成更佳的語法，文中各欄位代數及代字均以筆者所自製 EXCEL 彈道模組相應欄位為主，建構彈道模組步驟如次：

一、調製變因參數表

首先我們可以先將前段所探討各項變因製作成一表格（圖 7），用以固定各變因項之欄位及參數值，最後僅調整仰度及阻力係數數值即可（如表內紅色字體），本表須注意某些變因項單位之轉換，如將初速由英尺轉成公尺（英尺/3.2808399）、密位轉成度（密位/17.777777778）、由初速求算水平速度之公式寫法為「初速欄位值* $\text{COS}(\text{仰度欄位值}*\text{PI}()/180)$ 」、求算鉛直速度之公式寫法為「初速欄位值* $\text{SIN}(\text{仰度欄位值}*\text{PI}()/180)$ 」，以本表為例分別為水平速度「 $\text{B6}*\text{COS}(\text{B8}*\text{PI}()/180)$ 」及鉛直速度「 $\text{B6}*\text{SIN}(\text{B8}*\text{PI}()/180)$ 」，另外為減少誤差，時間間隔 Δt 必須要夠小，筆者計算所得結論 Δt 至少需為千分之一秒（0.001 秒），在不超過電腦運算負載之前提下， Δt 當然可設定成萬分之一秒（以飛行時間 20 秒來說，同一時間電腦處理計算量約為 200 萬筆）或更小。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		裝藥	射表初速	射表仰度		砲彈截面積(πr^2)			0.008785748	m ²
2	105榴彈砲	1號裝藥	640	295.5		105榴彈體重(m)			14.96854821	kg
3	空氣密度	1.225	kg/m ³			阻力 $dx, dy=(Cd*空密*截面)/2$			0.000710328	0.002603459
4	阻力係數 Cdx	0.132	阻力係數 Cdy	0.4838		水平初速 $Vx(0)$			186.9206102	m/s
5	105榴彈半徑	0.0528828	m			垂直初速 $Vy(0)$			55.80116975	m/s
6	初速	195.0719997	m/s			Δt			0.001	s
7	重力加速度(g)	9.81	m/s ²			水平加速度 $ax(0)=-((阻d/m)*Vx(0)^2)$			-1.658034184	
8	仰度	16.621875	度		出砲口瞬間	上升加速度 $ay(0)=-((阻d/m)*Vy(0)^2+g)$			-10.35157379	

圖 7 各項變因參數表

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		裝藥	射表初速	射表仰度		砲彈截面積(πr^2)			0.008785748	m ²
2	105榴彈砲	1號裝藥	640	295.5		105榴彈體重(m)			14.96854821	kg
3	空氣密度	1.225	kg/m ³			阻力 $dx, dy=(Cd*空密*截面)/2$			0.000710328	0.002603459
4	阻力係數 Cdx	0.132	阻力係數 Cdy	0.4838		水平初速 $Vx(0)$			186.9206102	m/s
5	105榴彈半徑	0.0528828	m			垂直初速 $Vy(0)$			55.80116975	m/s
6	初速	195.0719997	m/s			Δt			0.001	s
7	重力加速度(g)	9.81	m/s ²			水平加速度 $ax(0)=-((阻d/m)*Vx(0)^2)$			-1.658034184	
8	仰度	16.621875	度		出砲口瞬間	上升加速度 $ay(0)=-((阻d/m)*Vy(0)^2+g)$			-10.35157379	
9	$Vk(x,y)$	454.6685909	237.4920013							
10	$k(x,y)$	46.34746085	24.20917445				Vy 落地速度	55.02900718		
11	最高點時間	5.58685406	彈道最高點	154.47801	降落時間	5.6371143	總飛行時間	11.22396838	飛行距離	2000.0058509

圖 8 微積分計算各欄位數值示意圖

資料來源：圖 7、圖 8 均為筆者自繪

二、寫入微積分計算公式

將微積分計算公式寫入 EXCEL 內可方便使用者非常快速的得到「飛至最高點時間」、「彈道最高點」、「降落時間」、「總飛行時間」及「水平飛行距離」等正確數值，再以上述數值與拋射體運動公式相互比對，找到最接近之數值，筆者將微積分計算公式及結果寫在變因參數表下方（圖 8），可方便比對及查找，各欄位函數語法如下：

- 1、 $V_{xk} = ((2 * I2 * B7) / (B4 * B3 * I1)) ^{0.5}$ 。
- 2、 $V_{yk} = ((2 * I2 * B7) / (D4 * B3 * I1)) ^{0.5}$ 。
- 3、 $k_x = B9 / B7$ 。
- 4、 $k_y = C9 / B7$ 。
- 5、最高點時間 = (ATAN (RADIANS (I5/C9) *180/PI ())) *C10。
- 6、彈道最高點 = $C9 * C10 * LN (COS (RADIANS (B11/C10) *180/PI ())) + ((I5/C9) * SIN (RADIANS (B11/C10) *180/PI ()))$ 。
- 7、降落時間 = (ACOSH (EXP (D11/C9/C10))) *C10。
- 8、總飛行時間 = B11 + F11。

9、水平飛行距離=B9*B10*LN (1+ ((I4*H11) / (B9*B10)))。

三、寫入拋射體運動公式

若要使用 EXCEL 繪製彈道曲線圖，就必須要有非常多的 X，Y 座標資料，而拋射體運動公式正好可滿足上述條件，我們必須把前段所列舉出完整之拋射體運動公式，全數寫入 EXCEL 內，共計 10 個項次，各項次函數語法如下：

1、時間 (t) =0+\$I\$6 (時間由 0 開始)；時間 (t+△t) =A13+\$I\$6 (後續時間則由前一個時間+△t，於該欄位下拉複製公式即可 (圖 9))。

2、水平速度 Vx (t) =I4+ (I7*\$I\$6)，而 Vx (t+△t) 之數值為前一個時間當下的速度 Vx (t) 加上前一個時間當下的加速度 ax (t) 與時間間隔之乘積 △t，函數語法為 Vx (t+△t) =B13+ (H13*\$I\$6)，後續速度均為相同概念，於該欄位下拉複製公式即可 (圖 9))。

3、鉛直速度必須區分為上升與下降兩階段來實施計算 (圖 9)，上升階段 Vy (t) 上=I5+ (I8*\$I\$6)，上升之 Vy (t+△t) 數值為前一個時間當下的速度 Vy (t) 加上前一個時間當下的上升階段加速度 ay (t) 與時間間隔之乘積△t，函數語法為 Vy (t+△t) 上 =C13+ (I13*\$I\$6)，後續速度均為相同概念，於該欄位下拉複製公式即可，Vy (t+△t) 之數值因為受空氣阻力影響會越來越小，當數值由正轉負時，便可判斷彈體開始下降；下降階段 Vy (t) 降 =C5599- (J5599*\$I\$6)，下降之 Vy (t+△t) 數值為前一個時間當下的速度 Vy (t) 加上前一個時間當下的下降階段加速度 ay (t) 與時間間隔之乘積△t，函數語法為 Vy (t+△t) 降 =D5600- (J5600*\$I\$6)，後續速度均為相同概念，於該欄位下拉複製公式即可。

4、水平距離 X (t) =0+I4*\$I\$6+ (I7*\$I\$6^2) /2 (砲彈初始 X 座標為 0)；而 X (t+△t) 之數值為前一個時間的砲彈 X 座標加上前一個時間當下的水平速度 Vx (t) 與時間間隔△t 之乘積，再加上前一個時間當下的二分之一加速度 ax (t) 與時間間隔△t 平方之乘積，函數語法為 X (t+△t) =E13+B13*\$I\$6+ (H13*\$I\$6^2) /2，後續水平距離均為相同概念，於該欄位下拉複製公式即可 (圖 9))。

5、鉛直位移量亦必須區分為上升與下降兩階段來實施計算 (如圖九)，上升階段 Y (t) 上=0+I5*\$I\$6+ (I8*\$I\$6^2) /2，而上升之 Y (t+△t) 數值為前一個時間的砲彈 Y 座標加上前一個時間當下的水平速度 Vy (t) 與時間間隔△t 之乘積，再加上前一個時間當下的二分之一加速度 ay (t) 與時間間隔△t 平方之乘積，函數語法為 Y (t+△t) 上 =F13+C13*\$I\$6+ (I13*\$I\$6^2) /2，於該欄位下拉複製公式，當 Vy (t+△t) 之數值由正轉負時，便可判斷彈體開始下降，下降階段 Y (t) 降=F5599+C5599*\$I\$6+ (J5599*\$I\$6^2) /2，下降之 Y (t+△t) 降=G5600+D5600*\$I\$6+ (K5600*\$I\$6^2) /2，後續鉛直位移量均為相同概念，於該欄位下拉複製公式即可 (圖 9))。

Δt) 數值為前一個時間當下的速度 $V_y(t)$ 加上前一個時間當下的下降階段加速度 $a_y(t)$ 與時間間隔之乘積 Δt ，函數語法為 $V_y(t + \Delta t)$ 降 = $G5600 + D5600 * \$I\$6 + (J5600 * \$I\$6^2) / 2$ ，後續均為相同概念，於該欄位下拉複製公式即可。

6、水平加速度 $a_x(t) = -(\$I\$3 / \$I\$2) * B13^2$ ，而 $a_x(t + \Delta t)$ 之數值為 X 軸阻力係數值 (C_{dx}) 除以彈重再乘以 $V_x(t + \Delta t)$ 平方，所得數值帶入負號，函數語法為 $a_x(t + \Delta t) = -(\$I\$3 / \$I\$2) * B14^2$ ，後續水平加速度均為相同概念，於該欄位下拉複製公式即可（如圖九）。

7、鉛直加速度同樣必須區分為上升與下降兩階段來實施計算（如圖九），上升階段 $a_y(t)$ 上 = $-\$B\$7 - ((\$J\$3 / \$I\$2) * C13^2)$ ，上升之 $a_y(t + \Delta t)$ 上數值為負的重力加速度數值減去 Y 軸阻力係數值 (C_{dy}) 除以彈重再乘以 $V_y(t + \Delta t)$ 上平方，函數語法為 $a_y(t + \Delta t)$ 上 = $-\$B\$7 - ((\$J\$3 / \$I\$2) * C14^2)$ ，下降階段 $a_y(t)$ 降 = $F5599 + C5599 * \$I\$6 + (J5599 * \$I\$6^2) / 2$ ，下降之 $a_y(t + \Delta t)$ 數值為正值重力加速度數值減去 Y 軸阻力係數值 (C_{dy}) 除以彈重再乘以 $V_y(t + \Delta t)$ 降平方，函數語法為 $a_y(t)$ 降 = $\$B\$7 - ((\$J\$3 / \$I\$2) * D5600^2)$ ，後續均為相同概念，於該欄位下拉複製公式即可。

本段落看似複雜，但事實上所有函數邏輯均是依拋射體運動公式逐一建立，這也是前段敘述中所提到為何需要把完整公式逐一系列出之原因，只要依樣畫葫蘆建立與範例相同表格，並將筆者所提供的所有函數語法全數輸入，留意紅框處的部分，其餘均是按造非常規則之邏輯往下遞加而已，對 EXCEL 熟練的人，製作此表僅需 2-3 小時即可完成（圖 10）。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		裝藥	射表初速	射表仰度			砲彈截面積(πr^2)		0.008785748	m ²
2	105榴彈砲	1號裝藥	640	295.5			105榴彈體重(m)		14.96854821	kg
3	空氣密度	1.225	kg/m ³				阻力 $dx, dy = (C_d * \text{空密} * \text{截面}) / 2$		0.000710328	0.002603459
4	阻力係數 C_{dx}	0.132	阻力係數 C_{dy}	0.4838			水平初速 $V_x(0)$		186.9206102	m/s
5	105榴彈半徑	0.0528828	m				垂直初速 $V_y(0)$		55.80116975	m/s
6	初速	195.0719997	m/s				Δt		0.001	s
7	重力加速度(g)	9.81	m/s ²		出砲口瞬間	水平加速度 $a_x(0) = -(阻d/m) * V_x(0)^2$			-1.658034184	
8	仰度	16.621875	度			上升加速度 $a_y(0) = -((阻d/m) * V_y(0)^2 + g)$			-10.35157379	
9	$V_k(x,y)$	454.6685909	237.4920013							
10	$k(x,y)$	46.34746085	24.20917445				Vy落地速度	55.02900718		
11	最高點時間	5.58685406	彈道最高點	154.47801	降落時間	5.6371143	總飛行時間	11.22396838	飛行距離	2000.0058509
12	時間(t)	$V_x(t)$	$V_y(t)$ 上	$V_y(t)$ 降	X(t)	Y(t)上	Y(t)降	$a_x(t)$	$a_y(t)$ 上	$a_y(t)$ 降
13	0.001	186.9189522	55.79081818		0.186919781	0.055795994		-1.6580047702	-10.35137288	
14	0.002	186.9172942	55.7804668		0.373837904	0.111581636		-1.657975357	-10.351172	
15	0.003	186.9156362	55.77011563		0.56075437	0.167356928		-1.657945944	-10.35097117	
5597	5.585	178.0975126	0.017924767		1018.916024	154.4769988		-1.505202074	-9.810000056	
5598	5.586	178.0960074	0.008114767		1019.094121	154.4770118		-1.505176632	-9.810000011	
5599	5.587	178.0945023	-0.001695233		1019.272216	154.477015		-1.50515119	-9.81	9.81
5600	5.588	178.0929971	-0.011505233	-0.011505233	1019.45031	154.4770084	154.4770182	-1.505125749	-9.810000023	9.809999977
5601	5.589	178.091492	-0.021315234	-0.021315233	1019.628402	154.476992	154.4770116	-1.505100308	-9.810000079	9.809999921

$V_y(t)$ 之數值由正轉負，代表彈道最高點發生時間介於 5.586 秒至 5.587 秒區間

上升階段與下降階段加速度正負值不同

5、落角= $(-(\text{ATAN}(N2/M2)*180/\text{PI}()))*17.7777777777777$ 。

6、落角餘切= $(M2/N2)$ 。

7、末速(英呎)= $((M2^2+N2^2)^{0.5})*3.2808399$ 。

8、末速(公尺)= $S/3.2808399$ 。

L	M	N	O	P	Q	R	S	T
時間(t)	Vx(t)	Vy(t)降	X(t)	Y(t)降	落角	落角餘切	末速	末速(m)
10	171.6910411	-42.82011451	1790.901565	59.5138078	248.9599915	4.009588557	580.5453	176.95021
10.001	171.6896423	-42.8296056	1791.073255	59.47099244	249.0149503	4.008667366	580.548383	176.95115
10.002	171.6882434	-42.83909655	1791.244944	59.42816758	249.0699076	4.007746598	580.551468	176.95209
10.003	171.6868446	-42.84858735	1791.416631	59.38533322	249.1248636	4.006826251	580.554554	176.95303
10.004	171.6854458	-42.85807802	1791.588317	59.34248938	249.1798182	4.005906325	580.557642	176.95397
10.005	171.6840471	-42.86756855	1791.760002	59.29963605	249.2347713	4.00498682	580.560732	176.95491
10.006	171.6826483	-42.87705893	1791.931686	59.25677323	249.2897231	4.004067737	580.563823	176.95585
10.007	171.6812496	-42.88654917	1792.103368	59.21390091	249.3446734	4.003149073	580.566916	176.9568
10.008	171.6798509	-42.89603927	1792.275048	59.17101911	249.3996223	4.00223083	580.570011	176.95774
10.009	171.6784522	-42.90552923	1792.446727	59.12812781	249.4545698	4.001313007	580.573107	176.95868
10.01	171.6770535	-42.91501905	1792.618405	59.08522703	249.509516	4.000395604	580.576205	176.95963

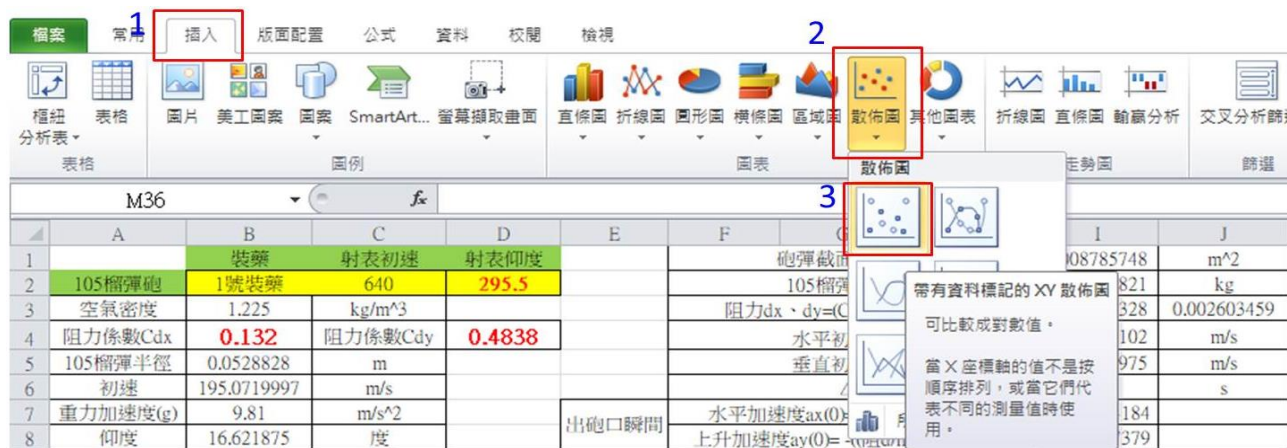
僅需輸入黃底空格之時間數值，便可同時顯示所有參數值

圖 11 參數求取作業區設置示意圖

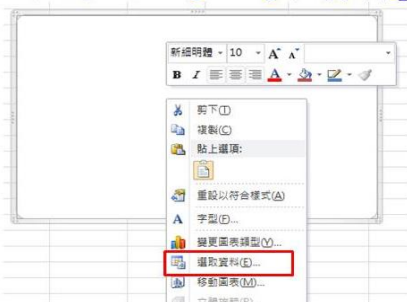
資料來源：筆者自繪

五、繪製彈道曲線圖

當完成所有表格及函數建置後，便可以得到彈道完整的 X，Y 座標資料，此時即可使用 EXCEL 繪製彈道曲線圖，首先於分頁選擇「插入」後，點選「散佈圖」，點選「帶有資料標記的 XY 散佈圖」，此時便會出現一空白 XY 分布圖，並在此空白分布圖上任一處使用滑鼠右鍵，點選「選取資料」，出現「選取資料來源」對話框後點選「新增」，出現「編輯數列」對話框，第 1 欄「數列名稱」可輸入自己想要的名稱，本範例輸入「=彈道曲線圖」、第 2 欄「數列 X 值」依本圖範例輸入「=工作表 3!\$E\$13:\$E\$11237」、第 3 欄「數列 Y 值」依本圖範例輸入「=工作表 3!\$V\$14:\$V\$11238」(欄位必須符合自己所建立的 EXCEL 相應欄位)，若依筆者所提供的範例逐動輸入，並完成此模組之建置，最後再依個人喜好調整線條顏色、粗細及 X、Y 軸數值，即可產生彈道曲線圖(圖 12)。



4.此時便會出現一空白XY分布圖，並在此空白分布圖上任一處使用滑鼠右鍵，點選「選取資料」



5.出現「選取資料來源」對話框，點選「新增」



6.數列名稱可輸入自己想要的名稱、數列X值及Y值依本圖範例輸入(欄位必須符合自己所建立的EXCEL相應欄位)



7.若依筆者所提供的範例逐動輸入，並完成此模組之建置，即可產生彈道曲線圖，最後再依個人喜好調整線條顏色、粗細及XY軸數值。

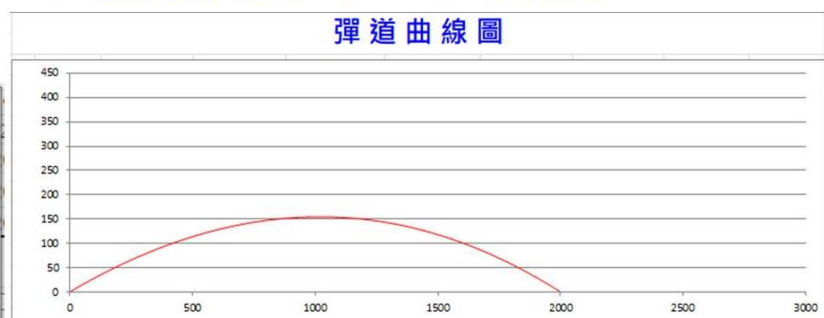


圖 12 繪製彈道曲線步驟示意圖

資料來源：筆者自繪

EXCEL 彈道模組之運用

囿於篇幅關係，筆者僅概略說明 EXCEL 彈道模組運用的幾個方法，爾後再針對使用 EXCEL 彈道模組輔助射彈修正課程之作法加以說明，基本運用方法如下：

一、調製阻力係數參數表

本研究先前已說明必須儘可能客觀的固定影響彈道之變因參數，並且將假

設與實際數值所產生之彈道計算誤差，集中在阻力係數 **Cdx** 及 **Cdy** 此兩個變因上，如此便可輕鬆推算此兩者於各號裝藥、不同仰度、不同距離之數值，再將所得數值製成表格，後續使用彈道模組時，直接輸入表內 **Cdx** 及 **Cdy** 之數值即可，筆者以 105 榴彈射表第 7 版為例，製作 1 號裝藥每 500 公尺彈道參數表，表內黑色字體為射表所列數值、藍色字體為彈道模組計算所得數值、紅色字體為推算之阻力係數數值，若射表數值與彈道模組計算數值不同則以黃底顯示（如表二）。

表 2 105 榴砲射表第 7 版 1 號裝藥阻力係數表

距離	1 射表 仰度	2 計算 仰度	3 Cdx	4 Cdy	5 射表 頂點	6 計算 頂點	7 射表 時間	8 計算 時間
500	66.6	66.67	0.1335	0.695	8	8	2.6	2.6
1000	136.7	136.7	0.1335	0.695	34	34	5.3	5.3
1500	212.0	212.0	0.1334	0.5804	81	81	8.2	8.15
2000	295.5	295.5	0.132	0.4838	154	154	11.2	11.224
2500	393.1	393.1	0.13194	0.3996	264	264	14.7	14.686
3000	520.7	520.65	0.1345	0.3121	442	442	19.0	18.977
3000(高)	1042.4	1042.41	0.18528	0.15778	1311	1311	32.9	32.707

計算仰度取4捨5入後，
與射表數值完全相同

計算時間取4捨5入後，除高
射界數值誤差0.193秒外
，餘與射表數值完全相同

距離	9 至頂點 時間	10 至頂點 距離	11 射表 落角	12 計算 落角	13 射表落 角餘切	14 計算落 角餘切	15 射表 末速	16 計算 末速
500	1.298	251.1	68	68	15.0	14.9	190	190
1000	2.645	505.2	141	142.2	7.2	7.12	186	186
1500	4.063	761.3	222	223.7	4.5	4.5	182	182
2000	5.582	1018.7	314	315	3.1	3.1	178	178
2500	7.296	1279	423	423	2.3	2.3	175	175
3000	9.409	1541.9	564	563.2	1.6	1.6	172	172.9
3000(高)	16.149	1556.1	1099	1098	0.5	0.5	175	175.6

計算所得落角、落角餘切、末速均
與射表數值誤差非常小

資料來源：筆者自行整理

二、製作所望之彈道曲線圖

調製完阻力係數表得到近似射表之彈道數值後，便可以依個人需求製作彈道曲線圖了，筆者依 1 號裝藥阻力係數表參數值，依序繪製每 500 公尺之彈道曲線圖，再將各曲線圖套疊，所得結果如圖 13，使用者可將滑鼠點至曲線圖上任一點，即會顯示該點之 X 及 Y 座標（圖 14）。

由於射表僅提供每 500 公尺距離之「落角」、「落角餘切」及「末速」數值，因此要儘可能藉由這些正確數值反推每 500 公尺距離之阻力係數，再使用差算法之方式求取每百公尺、五十公尺、甚至每公尺之阻力係數，使用差算法所推算之數值雖然並無射表正確之「落角」、「落角餘切」及「末速」數值可供驗證，然而就本文圖六「阻力係數與彈體飛行速度關係圖」所示，阻力係數在彈體飛行速度由次音速跨越至音速之間變化最為劇烈，而同一裝藥之初速均相等，阻力係數在此一裝藥之變化則相對穩定，表三為 1 號裝藥 2500 公尺至 3000 公尺間，每百公尺之阻力係數及飛行時間表，並且再以其數值繪製每百公尺之彈道曲線圖（圖 15）。

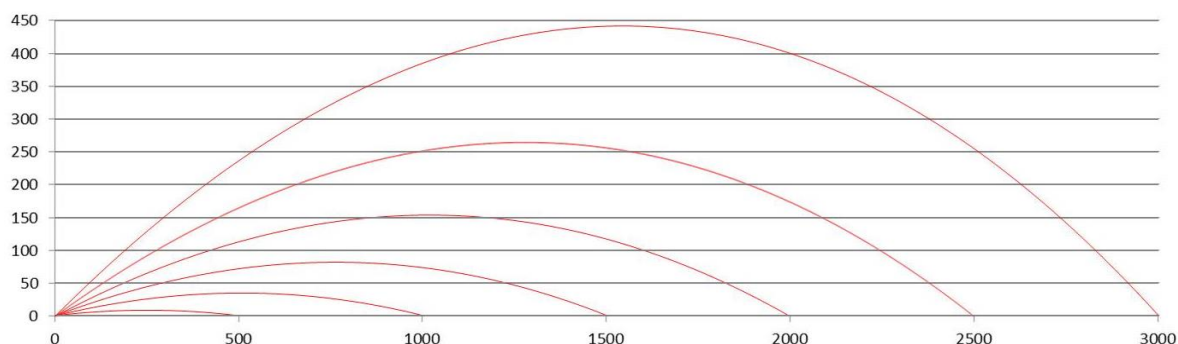


圖 13 1 號裝藥每 500 公尺距離之彈道曲線圖



圖 14 可瞭解彈道上任一點之水平距離及彈道高度

表 3 105 榴砲射表第 7 版 1 號裝藥 2500 至 3000 公尺，每百公尺阻力係數表

	1	2	3	4	5
距離	射表仰度	CDx	CDy	射表時間	計算時間
2500	393.1	→ 0.13194	0.3996	14.7	14.686
2600	415.3	0.132452	0.3821	15.5	15.455
2700	438.8	0.132964	0.3646	16.3	16.258
2800	463.9	0.133476	0.3471	17.1	17.105
2900	491.0	0.133988	0.3296	18.0	18.006
3000	520.7	→ 0.1345	0.3121	19.0	18.977

使用差算法求取各區間之阻力係數

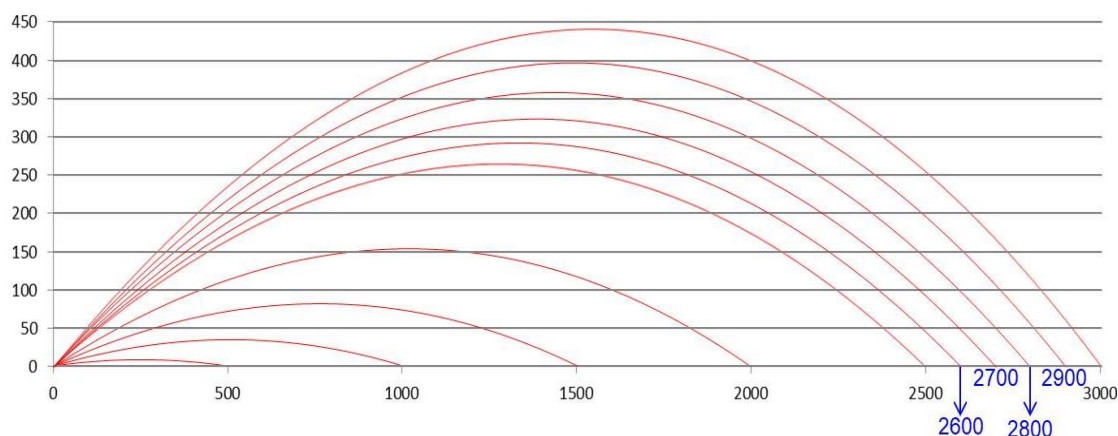


圖 15 增繪 2500 至 3000 公尺之間每百公尺彈道曲線圖

資料來源：表 3、圖 13、圖 14、圖 15 均為筆者自行整理及繪製

三、射擊死界之判定更加準確

以 105 榴彈砲射表第 7 版 1 號裝藥低射界射擊為例，欲對砲目距離 3000 公尺與陣地同標高之目標實施射擊，在砲目線上有一山丘，山頂與陣地之標高差為 430 公尺、距離砲陣地之水平距離 1800 公尺，查射表僅可得知射擊仰度 520.7 密位、最大彈道高 442 公尺、飛行時間 19.0 秒，但卻無法得知彈體是否可越過此山頂？然而藉由 EXCEL 彈道模組計算結果，可得到飛至彈道最高點時之水平距離為 1542.057709 公尺，飛至彈道最高點時間 9.41 秒，在水平距離 1800 公尺處時之彈道高為 428.2524913 公尺、飛行至此點所需時間 11.054 秒，因此此山頂即構成火炮於 1 號裝藥低射界射擊時之死界，射擊指揮所便可改為高射界射擊（圖 16）。

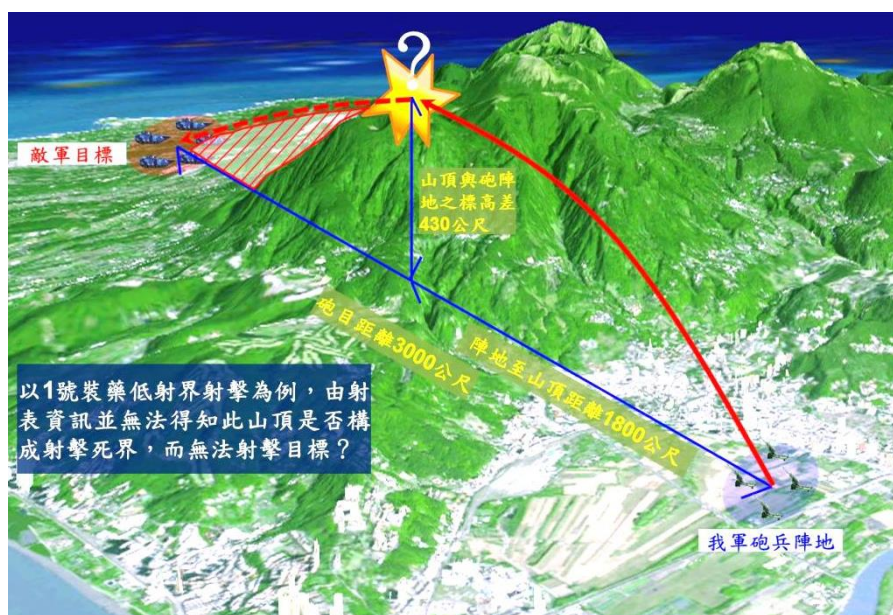


圖 16 射擊死界判定示意圖

資料來源：1.底圖引自林俊賢，《灘岸殲敵野戰防空戰術運用探討》，陸軍砲兵訓練指揮部 107 年戰術戰法，107 年 8 月。2.筆者自行整理及繪製

結論

陸軍野戰砲兵觀測訓練教範（第二版）第三至五章之內容甚為寶貴實用，除對於彈道學之概念做了非常多的解釋，甚至有對各種目標之射擊效果，若可將教範所闡述各種觀念結合，基本上就可初步瞭解彈道計算機之原理，然而這幾章之內容無論在專長教育或教學研究上，均甚少探討或鑽研，實為可惜。

另外筆者在過往教學及輔訓實務經驗中，常需針對射彈修正後所產生之結果實施解說，卻發覺所產生之結果往往僅是推論而未能具體化，因此筆者希望藉由建構 EXCEL 彈道模組，體現彈道飛行軌跡及數據，作為輔助教學之工具，使學者更容易一窺彈道現象，並且藉由本篇論述表達基礎彈道學之理念，畢竟 EXCEL 不是專業彈道計算及繪圖軟體，在使用上仍然需要以人工採多項步驟操作方式完成，若可激發共鳴達到拋磚引玉之效果，使更多人瞭解彈道計算機之概念，相信可使彈道模組之界面、功能與運用更加完善。

參考文獻

- 一、《陸軍野戰砲兵觀測訓練教範（第二版）》（桃園：國防部陸軍司令部，民國 99 年 11 月 10 日）。
- 二、中興大學機械工程研究所，熱流系統設計與分析－第四章－外流場之課程內容，2014 年。
- 三、王中原、周衛平，《外彈道設計理論與方法》（北京：科學出版社，2004 年 9 月）。
- 四、嚴章庚、祁戴康，《射表技術》（北京：國防工業出版社，2000 年 1 月）。

作者簡介

林政諭少校，陸軍官校 93 年班機械系，歷任觀通組長、副連長、連長、參謀主任，現任職於陸軍砲兵訓練指揮部射擊教官組。