WHAMPOA - An Interdisciplinary Journal 73(2018) 53-62

連續成功次數之常態逼近

蘇志成

陸軍軍官學校管理科學系

摘要

在本論文中，考慮獨立且具有相同分佈的 Bernoulli 隨機序列，其成功的機率趨近於 0，我們探討四種常見計算連續成功次數統計量的漸進分佈。首先，計算連續成功次數之統計量將被表示為嚴格平穩m-相關隨機序列之和，然後運用嚴格平穩m-相關隨機序列之中央極限定理，我們將得到一些計算連續成功次數統計量的常態逼近定理。

關鍵詞：Bernoulli 隨機變數、中央極限定理、m-相關隨機變數、連續成功次數

一、前言

對$n \ge 1$，令 $\{X_{n,i}, i \ge 1\}$ 為一序列之 Bernoulli 隨機變數，即$X_{n,i}$取值為 0 及 1，其分別代表失敗及成功，$\{X_{n,i}, i \ge 1\}$ 之連續成功（success runs）次數的相關研究經常出現在文獻中，而有關連續成功次數的理論亦大量應用於各研究領域中，如品質管制、可靠度工程、基因工程、計算機工程及電機通訊等相關領域。文獻上所探討的連續成功次數有許多不同的計算型態，例如，對固定的正整數k，在前n個 Bernoulli 隨機變數$X_{n,1}, X_{n,2}, ..., X_{n,n}$中，計算連續出現$k$個或$k$個以上成功次數是文獻中經常探討的，其四種常見統計量的不同計算方式如下：(蘇志成（2014）)

（i）令$E_{n,k}$表$X_{n,1}, X_{n,2}, ..., X_{n,n}$中恰連續出現$k$個成功的次數，這裡恰連續出現$k$個成功的次數是指連續$k$個成功的前後皆為失敗，但在最前面$k$個(即$X_{n,1}, X_{n,2}, ..., X_{n,k}$)，只需第$k+1$個(即$X_{n,k+1}$)為失敗，且在最後面$k$個(即$X_{n,n-k+1}, X_{n,n-k+2}, ..., X_{n,n}$)，只需第$n-k$個(即$X_{n,n-k}$)為失敗；

（ii）令$G_{n,k}$表$X_{n,1}, X_{n,2}, ..., X_{n,n}$中恰連續出現$k$個或$k$個以上成功的次數；

（iii）令$M_{n,k}$表自$X_{n,1}, X_{n,2}, ..., X_n$中依序掃描，計算其連續出現$k$個成功的次數，重疊的部分照計；

（iv）令$N_{n,k}$表自$X_{n,1}, X_{n,2}, ..., X_{n,n}$中依序掃描，發生連續出現$k$個成功時，次數加 1，並從其後重新掃描(即重疊部分不計)，最後加總所得的次數。

對$i \ge 1$，若令

$$Y_{n,i} = X_{n,i} X_{n,i+1} \cdots X_{n,i+k-1}\text{，} \quad (1)$$

$$Z_{n,i} = (1 - X_{n,i-1}) X_{n,i} \cdots X_{n,i+k-1} (1 - X_{n,i+k})\text{，} \quad (2)$$

$$W_{n,i} = (1 - X_{n,i-1}) X_{n,i} X_{n,i+1} \cdots X_{n,i+k-1} \quad (3)$$

及

$$\begin{aligned} V_{n,i} &= (1 - X_{n,i-1}) X_{n,i} X_{n,i+1} \cdots X_{n,i+k-1} \\ &+ (1 - X_{n,i-k-1}) X_{n,i-k} X_{n,i-k+1} \cdots X_{n,i+k-1} + \cdots \quad (4) \\ &+ (1 - X_{n,i-[i/k]k-1}) X_{n,i-[i/k]k} X_{n,i-[i/k]k+1} \cdots X_{n,i+k-1}, \end{aligned}$$

其中令$X_{n,0} = 0$，且$[x]$表小於、等於x的最大整數。則可知

$$E_{n,k}=\sum_{i=1}^{n-k}Z_{n,i}+W_{n,n-k+1},$$

$$G_{n,k}=\sum_{i=1}^{n-k+1}W_{n,i},$$

$$M_{n,k}=\sum_{i=1}^{n-k+1}Y_{n,i}$$

及

$$N_{n,k}=\sum_{i=1}^{n-k+1}V_{n,i}\text{ 。}$$

各種連續成功次數統計量具有什麼分佈，在文獻中經常探討，其主要研究方向有二，其一是探討其確切的分佈，此方面的研究，傳統上是運用組合理論求解，但其所得的公式常是複雜而難以計算，並不實用。Fu and Koutras (1994) 突破傳統解法，提出一具有一致性且容易計算的有限馬可夫鏈嵌入（finite Markov chain imbedding）法，此法將模式轉化成一有限馬可夫鏈，然後像 $E_{n,k}$，$G_{n,k}$，$M_{n,k}$ 及 $N_{n,k}$ 等有關連續成功次數統計量的確切分佈即可透過此一有限馬可夫鏈的推移機率（transition probability) 來表示，並能很有效率的求得。利用有限馬可夫鏈嵌入法探討確切分佈及其相關的研究常見於文獻中，例如可見 Fu (1996)、Lou (1996)、Fu and Lou (2003)、Fu (2012)、Du et al. (2016) 及其參考文獻。

另一個探討連續成功次數統計量分佈的研究方向為求其極限分佈（limiting distributions），這又分為 Poisson 逼近（Poisson approximations) 及常態逼近 (normal approximations) 二個主題。對 $n\ge 1$，令 $\{X_{n,i}, i\ge 1\}$ 為獨立且具有相同分佈（independent and identically distributed) 之 Bernoulli 隨機變數，其中 $P(X_{n,i}=1)=p_n=1-P(X_{n,i}=0), \forall i\ge 1$，即成功的機率為 p_n。又對 $i\ge 1$，令 $R_{n,i}$ 表自 $X_{n,i}$ 開始成功連續出現的次數，即 $R_{n,i}=\inf\{m\ge 0 \mid X_{n,i+m}=0\}$，且令 $Q_{n,k_n}=\sum_{i=1}^{k_n}R_{n,i}$。在Poisson逼近方面的研究，已知，若 $\lim_{n\to\infty}k_n=\infty$ 且 $\lim_{n\to\infty}k_n p_n=\lambda$，則 Q_{n,k_n} 將分佈收斂至一參數為 λ 的Poisson分佈，此極限定理之一簡潔證明可見周元燊 (1992)。另外，Wang and Ji (1995) 考慮 $\{X_{n,i}, i\ge 1\}$ 為一平穩（stationary）之 Bernoulli 馬可夫鏈，在適當條件下，證明 $E_{n,k}$ 及 $G_{n,k}$ 的極限分佈為 Bernoulli 分佈及Poisson分佈之褶積 (convolutions)，而 $N_{n,k}$ 及 $M_{n,k}$ 的極限分佈則為 Bernoulli 分佈和幾何 (geometric) 分佈之混合 (mixture) 與複合 (compound) Poisson 分佈的褶積。蘇志成 (2014) 透過將 l 階馬可夫鏈視為一具有 l 維度狀態空間的馬可夫鏈，成功將Wang and Ji (1995) 的結果推廣至更一般的 l 階馬可夫鏈。其他有關連續成功次數或考慮更一般容許其他非0,1值出現的型態 (patterns) 發生次數之Poisson逼近的研究，可參考趙民德 (1995)、Wang et al. (2003)、Johnson and Fu (2014)、Daly (2017) 及其參考文獻。

另一方面，在常態逼近方面的研究，可參考 Hirano et al. (1991)、Godbole (1992)、Kou and Chow (1997)、趙民德 (1997)、Stefanov (2000)、Fu and Lou (2007)、Makri and Psillakis (2011a)、(2011b) 及 (2012)、Mytalas and Zazanis (2013) 及 (2014) 及其參考文獻。例如，考慮 $\{X_{n,i}, i\ge 1\}$ 為一獨立且具有相同分佈之 Bernoulli 隨機序列，Kou and Chow (1997) 給了一 Q_{n,k_n} 滿足中央極限定理（central limit theorem）的充分必要條件，即假設 $\lim_{n\to\infty}k_n p_n=\infty$，則

$$(Q_{n,k_n}-k_n a_n)\Big/\left(\sigma_{k_n}\sqrt{k_n(1-p_n)}\right)$$

分佈收斂（converges in distribution) 至標準常態分佈 (standard normal distribution) $N(0,1)$，若且唯若 $\lim_{n\to\infty}k_n(1-p_n)=\infty$，其中 $\sigma_n^2=2a_n^4+5a_n^3+4a_n^2+a_n$，$a_n=p_n/(1-p_n)$。而 Hirano et al. (1991)、Makri and Psillakis (2011a) 及 (2011b) 分別探討 $M_{n,k}$、$G_{n,k}$

及 $E_{n,k}$ 的中央極限定理，Godbole (1992) 也有一些關於 $M_{n,k}$ 常態逼近的探討。而 Makri and Psillakis (2011a) 及 Makri and Psillakis (2012) 也有一些其他連續成功次數統計量的常態逼近定理之研究。Mytalas and Zazanis (2013) 則考慮 $\{X_{n,i}, i \ge 1\}$ 為一 Bernoulli 馬可夫鏈，探討與 $(E_{n,k}, G_{n,k}, N_{n,k}, M_{n,k})$ 相關的多維中央極限定理。這些研究均假設成功的機率 p_n 及推移機率 π_j 是固定的，不會隨 n 而改變。

在本文中，我們仍將考慮 $\{X_{n,i}, i \ge 1\}$ 為一獨立且具有相同分佈之 Bernoulli 隨機序列，探討連續成功次數 $E_{n,k}$、$G_{n,k}$、$M_{n,k}$ 及 $N_{n,k}$ 的常態逼近，但和上述一些文獻所假設不同的地方，是我們將考慮當 $n \to \infty$ 時，p_n 趨近於 0，在這樣的條件下，我們可以得到一些形式較為簡潔的中央極限定理。首先，在第2節，我們將給一嚴格平穩 m-相關隨機序列的中央極限定理。接著，從 (1)、(2)及(3)式，可知 $\{Y_{n,i}, i \ge 1\}$、$\{Z_{n,i}, i \ge 1\}$ 及 $\{W_{n,i}, i \ge 1\}$ 均為嚴格平穩 m-相關隨機序列，即 $M_{n,k}$、$E_{n,k}$ 及 $G_{n,k}$ 可表為嚴格平穩 m-相關隨機序列之和。因此，如同一些文獻所探討的，我們可運用第2節的中央極限定理，進而得到對應各連續成功次數統計量的常態逼近定理。而即使 $\{V_{n,i}, i \ge 1\}$ 並非嚴格平穩 m-相關隨機序列，但從 $M_{n,k}$ 和 $E_{n,\mathrm{k}}$ 的常態逼近定理，及 $W_{n,i}, Y_{n,i}$ 與 $V_{n,i}$ 的大小關係，也可推得 $V_{n,i}$ 之和 $N_{n,k}$ 的中央極限定理。最後，第4節則為結論與討論。

二、*m*-相關隨機序列之中央極限定理

首先，本節將先回顧一 m-相關隨機序列之中央極限定理，運用此定理，我們將在下一節得到本文的主要結果。對一隨機序列 $\{X_i, i \ge 1\}$，若對任意 $s \ge 1$ 及 $n \ge 1$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，$(X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, \cdots, X_{t_n+s})$ 之聯合分佈（joint distribution）與 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$ 之聯合分佈相同，則稱 $\{X_i, i \ge 1\}$ 為嚴格平穩的（strictly stationary）。而對一嚴格平穩的隨機序列 $\{X_i, i \ge 1\}$，若對所有 $t \ge 1$，二隨機序列 $\{X_i, i \le t\}$ 與 $\{X_i, i \ge t+m+1\}$ 為獨立的 (independent)，其中 m 為固定之非負整數，則稱此隨機序列 $\{X_i, i \ge 1\}$ 為 m-相關的。已知若 $\{X_i, i \ge 1\}$ 為一嚴格平穩的隨機序列，且 $Var(X_i) < \infty, \forall i \ge 1$，則

$$\gamma_X(r,s) = \gamma_X(r+t, s+t), \forall r,s,t \ge 1$$

其中

$$\begin{aligned}&\gamma_X(r,s)\\&= Cov(X_r, X_s)\\&= E\left[\left(X_r - EX_r\right)\left(X_s - EX_s\right)\right], \forall r,s \ge 1\end{aligned}$$

為 $\{X_i, i \ge 1\}$ 的自相關函數（autocovariance function）。由於

$$\gamma_X(r,s) = \gamma_X(r-s+1, 1), \forall r,s \ge 1，$$

因此自相關函數可以單變數函數 $\gamma(\cdot)$ 來表示，即

$$\begin{aligned}\gamma(h) &\equiv \gamma_X(h+1, 1)\\&= Cov(X_{t+h}, X_t), \forall t \ge 1, -t \le h < \infty\end{aligned}$$

對一嚴格平穩的 m-相關隨機序列，Hoeffeding and Robbins (1948) 給一中央極限定理，此為傳統中央極限定理之推廣，其敘述如下，亦可見 Brockwell and Davis (2009) 。

定理 1. 假設 $\{X_i, i \ge 1\}$ 為一嚴格平穩的 m-相關隨機序列，且對任意 $i \ge 1$，$EX_i = 0$ 且 $Var(X_i) < \infty$。若令

$$\gamma_m = \gamma(0) + 2\sum_{j=1}^{m} \gamma(j) \ne 0，$$

則

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\gamma_m$

(ii) $\sum_{i=1}^{n}X_i\Big/\sqrt{n\gamma_m}$ 分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$

三、連續成功次數的中央極限定理

在本節中，假設對 $n\geq 1$，令 $\{X_{n,i},i\geq 1\}$ 為一獨立且具有相同分佈之 Bernoulli 隨機序列，其中

$$P(X_{n,i}=1)=p_n=1-P(X_{n,i}=0),\forall i\geq 1，$$

我們將探討與連續成功次數 $E_{n,k}$、 $G_{n,k}$、$N_{n,k}$ 及 $M_{n,k}$ 相關之常態逼近。首先，定理 2 是有關 $M_{n,k}$ 之中央極限定理。

定理 2. 對固定 $k\geq 1$，若 $n\to\infty$ 時，$p_n\to 0$ 且 $np_n^k\to\infty$，則

$$\frac{M_{n,k}-np_n^k}{\sqrt{np_n^k}}$$

分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$。

證明：首先，$Y_{n,i}$ 如第一節（1）之定義，易知 $\{Y_{n,i},i\geq 1\}$ 為一嚴格平穩之 $(k-1)$-相關隨機序列。又 $EY_{n,i}=p_n^k$，且 $\{Y_{n,i},i\geq 1\}$ 的自相關函數為

$$\begin{aligned}\gamma(j)&=Cov(Y_{n,i+j},Y_{n,i})\\&=E(Y_{n,i+j}Y_{n,i})-E(Y_{n,i+j})E(Y_{n,i}) \qquad (5)\\&=p_n^{k+j}-p_n^{2k},\ \forall i\geq 1,\ 0\leq j\leq k\text{-}1.\end{aligned}$$

因此，由 (5) 式，可得

$$\begin{aligned}\gamma_{k-1}&=\gamma(0)+2\sum_{j=1}^{k-1}\gamma(j)\\&=p_n^k\left[1-p_n^k+\frac{2p_n(1-p_n^{k-1})}{1-p_n}-2(k-1)p_n^k\right]。\end{aligned}$$

由定理 1，可知

$$\frac{M_{n,k}-(n-k+1)p_n^k}{\sqrt{(n-k+1)\gamma_{k-1}}}$$

分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$。由於

$$\lim_{n\to\infty}\left[1-p_n^k+\frac{2p_n(1-p_n^{k-1})}{1-p_n}-2(k-1)p_n^k\right]=1,$$

因此可知

$$\frac{M_{n,k}-(n-k+1)p_n^k}{\sqrt{(n-k+1)p_n^k}}$$

分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$。又由於

$$\begin{aligned}&\frac{M_{n,k}-np_n^k}{\sqrt{np_n^k}}\\&=\frac{M_{n,k}-(n-k+1)p_n^k}{\sqrt{(n-k+1)p_n^k}}\cdot\sqrt{\frac{n-k+1}{n}}-\frac{(k-1)p_n^k}{\sqrt{np_n^k}},\end{aligned}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n-k+1}{n}}=1$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(k-1)p_n^k}{\sqrt{np_n^k}}=0.$$

故可得證

$$\frac{M_{n,k}-np_n^k}{\sqrt{np_n^k}}$$

分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$。

下列則是 $E_{n,k}$ 的常態逼近結果。

定理 3. 對固定 $k\ge 1$，假設 $n\to\infty$ 時，$p_n\to 0$，且

(i) 若 $\lim_{n\to\infty} np_n^k=\infty$，則

$$\frac{E_{n,k}-np_n^k(1-p_n)^2}{\sqrt{np_n^k}}$$

分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$。

(ii) 若 $\lim_{n\to\infty} np_n^k=\infty$，且 $\lim_{n\to\infty} np_n^{k+2}=0$，則

$$\frac{E_{n,k}-np_n^k}{\sqrt{np_n^k}}$$

分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$。

證明：首先，$Z_{n,i}$ 亦如第一節（2）之定義，則 $\{Z_{n,i}, i\ge 1\}$ 為一嚴格平穩之 $(k+1)$-相關隨機序列。又 $EZ_{n,i}=p_n^k(1-p_n)^2$，

$$\begin{aligned}\gamma(0)&=Var(Z_{n,i})\\&=p_n^k(1-p_n)^2\left[1-p_n^k(1-p_n)^2\right],\end{aligned}\tag{6}$$

及

$$\begin{aligned}\gamma(k+1)&=E(Z_{n,i+k+1}Z_{n,i})-E(Z_{n,i+k+1})E(Z_{n,i})\\&=p_n^{2k}(1-p_n)^3-p_n^{2k}(1-p_n)^4\\&=p_n^{2k+1}(1-p_n)^3\ \ \forall i\ge 1.\end{aligned}\tag{7}$$

且因為

$$Z_{n,i}Z_{n,i+j}=0,\ \text{a. s.},\ \forall i\ge 1,\ 1\le j\le k,$$

因此

$$\begin{aligned}\gamma(j)&=-E(Z_{n,i+j})E(Z_{n,i})\\&=-p_n^{2k}(1-p_n)^4,\ \forall 1\le j\le k.\end{aligned}\tag{8}$$

由（6), (7) 及 (8)，可得

$$\gamma_{k+1}=p_n^k(1-p_n)^2\cdot\left[1-(2k+1)p_n^k(1-p_n)^2+2p_n^{k+1}(1-p_n)\right]。$$

由於 $n\to\infty$ 時，

$$(1-p_n)^2\left[1-(2k+1)p_n^k(1-p_n)^2+2p_n^{k+1}(1-p_n)\right]$$

趨近於 1，故由定理 1 可得

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-k} Z_{n,i}-(n-k)p_n^k(1-p_n)^2}{\sqrt{(n-k)p_n^k}}$$

分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$。
而由於

$$\begin{aligned}&\frac{E_{n,k}-np_n^k(1-p_n)^2}{\sqrt{np_n^k}}\\&=\frac{\sum_{i=1}^{n-k} Z_{n,i}-(n-k)p_n^k(1-p_n)^2}{\sqrt{(n-k)p_n^k}}\cdot\sqrt{\frac{n-k}{n}}\\&\quad-\frac{kp_n^k(1-p_n)^2}{\sqrt{np_n^k}}+\frac{W_{n,n-k+1}}{\sqrt{np_n^k}},\end{aligned}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n-k}{n}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{kp_n^k(1-p_n^k)^2}{\sqrt{np_n^k}}=0$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_{n,n-k+1}}{\sqrt{(n-k)p_n^k}}=0,\ \text{a. s.},$$

因此

$$\frac{E_{n,k}-np_n^k(1-p_n)^2}{\sqrt{np_n^k}}$$

分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$，得證 (i)。此外，可知

$$\frac{E_{n,k}-np_n^k(1-p_n)^2}{\sqrt{np_n^k}}$$

$$=\frac{E_{n,k}-np_n^k}{\sqrt{np_n^k}}+\sqrt{n}\,p_n^{k/2+1}(2-p_n),$$

因此，若 $\lim_{n\to\infty} np_n^{k+2}=0$ ，則

$$\frac{E_{n,k}-(n-k)p_n^k}{\sqrt{(n-k)p_n^k}}$$

分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$ ，即得證 (ii)。

事實上，運用趙明德（1997）的方法，可證明當 $\lim_{n\to\infty} np_n^k=\infty$，且 $\lim_{n\to\infty} np_n^{k+2}=0$ 時，

$$\frac{E_{n,k}-M_{n,k}}{\sqrt{np_n^k}}$$

機率收斂(converges in probability)至 0。此時，再利用定理 2 的結果，也可得證定理 3 之(ii)。

對如第一節 (3) 定義之 $W_{n,i}$ ，由於 $\{W_{n,i}, i\ge 1\}$ 為一嚴格平穩之 k-相關隨機序列，且可知

$$EW_{n,i}=p_n^k(1-p_n)\text{ ，}$$

$$\gamma(0)=p_n^k(1-p_n)\left[1-p_n^k(1-p_n)\right],$$

及

$$\gamma(j)=-p_n^{2k}(1-p_n)^2,\ \forall 1\le j\le k。$$

因此，運用嚴格平穩 m-相關隨機序列的中央極限定理，可得到下列 $W_{n,i}$ 之和 $G_{n,k}$ 的常態逼近定理，其證明與定理 3 雷同，予以省略。

定理 4. 對固定 $k\ge 1$，假設 $n\to\infty$ 時，$p_n\to 0$ ，且

(i) 若 $\lim_{n\to\infty} np_n^k=\infty$ ，則

$$\frac{G_{n,k}-np_n^k(1-p_n)}{\sqrt{np_n^k}}$$

分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$ 。

(ii) 若 $\lim_{n\to\infty} np_n^k=\infty$ ，且 $\lim_{n\to\infty} np_n^{k+2}=0$ ，則

$$\frac{G_{n,k}-np_n^k}{\sqrt{np_n^k}}$$

分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$ 。

最後，對如第一節 (4) 定義之 $V_{n,i}$ ，雖然 $\{V_{n,i}, i\ge 1\}$ 並非一嚴格平穩之 m-相關隨機序列，無法直接運用嚴格平穩 m-相關隨機序列的中央極限定理，得出其和 $N_{n,k}$ 的常態逼近定理。但事實上，我們可知

$$W_{n,i}\le V_{n,i}\le Y_{n,i},\ \forall i\ge 1,$$

因此，從定理 2 及定理 4 的 (ii)，我們可得到下列定理 5 的結果。

定理 5. 對固定 $k\ge 1$，假設 $n\to\infty$ 時，$p_n\to 0$ ，$np_n^k\to\infty$ 且 $np_n^{k+2}\to 0$ ，則

$$\frac{N_{n,k}-np_n^k}{\sqrt{np_n^k}}$$

分佈收斂至標準常態分佈 $N(0,1)$ 。

四、結論與討論

在本文中，考慮 Bernoulli 隨機變數成功機率趨近於 0 的條件下，透過將一些常見連續成功次數統計量表為一嚴格平穩 m-相關隨機序列之和，再藉由嚴格平穩 m-相關隨機序列的中央極限定理，我們成

功得出一些形式更為簡潔之成功次數統計量的中央極限定理。運用相同的技巧，其他本文未探討的一些連續成功次數統計量應該也會有類似的常態逼近定理。此外，若考慮 $\{X_{n,i}, i \geq 1\}$ 為更一般的馬可夫鏈或 m-相關隨機序列，在適當的條件下，是否也有對應的常態逼近結果，是後續值得深入研究探討的。最後，分佈收斂速度也是有趣而文獻常探討的主題，因此，本文所得到常態極限定理之收斂速度為何，也是值得再進一步探討的。

參考文獻：

[1] Brockwell, P. J. and Davis, R. A. *Time Series：Theory and Methods.* Springer-Verlag, New York, 2009.

[2] Daly, F., On magic factors in Stein's method for compound Poisson approximation. *Electronic Communications in Probability*, **22**, 1-10, 2017.

[3] Du, S., Lin, C. and Cui, L., Reliabilities of a single-unit system with multi-phased missions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **45**, 2524-2537, 2016.

[4] Fu, J. C., Distribution theory of runs and patterns associated with a sequence of multi-stage trials. *Statistica Sinica*, **6**, 957-974, 1996.

[5] Fu, J. C., On the distribution of the number of occurrences of an order-preserving pattern of length three in a random permutation. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **14**, 831-842, 2012

[6] Fu, J. C. and Koutras, M. V. , Distribution theory of runs : A Markov chain approach, *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 1050-1058, 1994.

[7] Fu, J. C. and Lou, W. Y. W., *Distribution theory of runs and patterns and its applications : a finite Markov chain imbedding approach*. World Scientific, Singapore, 2003.

[8] Fu, J. C. and Lou, W. Y. W., On the normal approximation for the distribution of the number of simple or compound patterns in a random sequence of multi-state trials. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **9**, 195-205, 2007.

[9] Godbole, A. P., The exact and asymptotic distribution of overlapping success runs. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **21**, 953-967, 1992.

[10] Hirano, K., Aki, S., Kashiwagi, N. and Kuboki, H., On Ling's binomial and negative binomial distributions of order *k*, *Statistics and Probability Letters*, **11**, 503-509, 1991.

[11] Hoeffding, W. and Robbins, H., The central limit theorem for dependent random variables. *Duke Math. J.* **15**, 773–780, 1948.

[12] Johnson, B. C. and Fu, J. C., Approximating the distributions of runs and patterns, *Journal of Statistical Distributions and Applications*, **1**:5, 2014.

[13] Kou, S. G. and Chow, Y. S., A central limit theorem for the number of success runs : An example of regenerative processes, *Statistica Sinica*, **7**, 157-166, 1997.

[14] Lou, W. Y. W., On runs and longest run tests : a method of finite Markov chain

imbedding, *Journal of the American Statistical Association*, **91**, 1595-1601, 1996.

[15] Makri, F. S. and Psillakis, Z. M., On runs of length exceeding a threshold : normal approximation, *Statistical papers* **52**, 531-551, 2011a.

[16] Makri, F. S. and Psillakis, Z. M., On success runs of a fixed length in Bernoulli sequences : exact and asymptotic results, *Computers and Mathematics with Applications* **61**, 761–772, 2011b.

[17] Makri, F. S. and Psillakis, Z. M., Counting certain binary strings, *Journal of Statistical Planning and Inference* **142**, 908-924, 2012.

[18] Mytalas, G. C. and Zazanis, M. A., Central limit theorem approximations for the number of runs in Markov-dependent binary sequences, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **143**, 321-333, 2013.

[19] Mytalas, G. C. and Zazanis, M. A., Central limit theorem approximations for the number of runs in Markov-dependent multi-type sequences, *Communication in Statistics- Theory and Methods*, **43**, 1340-1350, 2014.

[20] Stefanov, V. T., On run statistics for binary trials. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **87**, 177-185, 2000.

[21] Wang, Y. H. and Ji, S., Limit theorems for the number of occurrences of consecutive *k* successes in *n* Markovian trials, *Journal of Applied Probability*, **32**, 727-735, 1995.

[22] Wang, Y. H., Chang, H. F. and Chen, S. Y., Convergence theorems for the lengths of consecutive successes of Markov Bernoulli sequences, *Journal of Applied Probability*, **40**, 741-749, 2003.

[23] 周元燊, 一個 Poisson 定理. *中國統計學報* **30**, 241-244, 1992.

[24] 趙民德, 一個關於多維 Poisson 收斂的結果, *中國統計學報* **33**, 95-104, 1995.

[25] 趙民德, 連續成功次數的極限分布, *中國統計學報* **35**, 119-124,1997.

[26] 蘇志成, 有限馬可夫鏈之和及 *l* 階馬可夫鏈之連續成功次數的漸近分布. *統計資訊評論* **16**, 19-32, 2014.

Normal approximations for the number of successes in success runs

Jyh-Cherng Su

Department of Management Science, R.O.C. Military Academy

Abstract

In this paper, considering a sequence of independent and identically distributed Bernoulli random variables with the probability of success tending to 0, we study the asymptotic distributions for the four well-known statistics of counting the number of successes in success runs. First, the statistics of counting the number of success runs will be expressed as sums of strictly stationary *m*-dependent random variables. Then, using the central limit theorem for strictly stationary *m*-dependent random variables, we will obtain some normal approximations for the number of successes in success runs.

Key words：Bernoulli random variable, central limit theorem, *m*-dependent random variable, success run