

以虛擬實境模擬圓形薄膜振動

Simulation of Vibration of Circular Membrane by Virtual Reality

林志勳¹ 莫豐銓²

空軍航空技術學院 機械工程科¹

東陽實業集團 技術部²

Chih-Hsun Lin¹ Fong-Chun Mo²

Department of Mechanical Engineering, Air Force Institute of Technology¹

Department of Technology, Tong Yang Group²

摘要

本文旨在運用虛擬實境程式語言 X3D (Extensible 3D) 模擬圓形薄膜振動，透過 X3D 與瀏覽器的結合，將圓形薄膜振動以動態圖形的方式顯示在電腦螢幕上。X3D 是延續 VRML 特性之新一代虛擬實境程式語言，具有虛擬實境、互動性及跨平台的特性，本文即運用上述之特性，配合 X3D 的 Script 節點嵌入 ECMA Script 程式語言和 PROTO 節點，模擬建構一個具有動態變形之圓形薄膜。

關鍵詞：虛擬實境、圓形薄膜、VRML、X3D、ECMA Script

Abstract

The paper aims to simulate vibration of circular membrane on a computer screen incorporated with X3D and browsers. X3D is a new generation virtual reality programming language and it inherits VRML's characteristics of virtual reality, interaction and cross-platform. Because of the merits mentioned above, the paper uses the Script node embedded ECMA Script language and PROTO node to simulate and construct dynamic deformations of circular membranes on X3D.

Key Words: Virtual Reality, Circular membrane, VRML, X3D, ECMA Script

壹、前言

近來由於資訊硬體及軟體的進步,使得計算速度提升及功能增強,在繪圖表現上呈現出平滑反鋸齒之清晰度,同時也利用動態模糊(Motion blur)的技巧讓畫面呈現接近真實狀況,虛擬實境藉由先進的電腦繪圖技巧來支援表現其三要素(I^3):想像力(Imagination)、互動性(Interaction)和融入性(Immersion) [1]。此外現今數位表現已不再限定於傳統的 2D 形式,越來越多的數位內容以 3D 或虛擬實境的形態展現,互動式的 3D 虛擬環境已大量應用於相關的研究及商業行為上,未來發展的腳步會隨著硬體的更新而改進。於現今仍在進行且發展中的歷程中,已產生或採用一些與虛擬實境有關的程式語言或函數庫,例如:VRML、X3D、JAVA3D、OpenGL、Cult3D 與 DirectX 等[2]。

由於本研究基於學術及開程式碼(Open Source)的精神,因此選擇使用 X3D 為虛擬實境模擬之程式語言,該語言為一種 3D 圖像標記語言,同時具有影像圖形結構功能與檔案格式編碼的電腦程式工具,它是由 Web3D 所開發出的,Web3D 的前身為 VRML 聯盟,VRML 聯盟在 1998 年改組為 Web3D 聯盟,同年

Web3D 提出 X3D 的概念,1999 年 2 月開始正式制定,經數年努力,於 2003 年完成 X3D 的最終格式草案,並送至 ISO 審議,嚴格地說,X3D 是 VRML 97 的修改版,因此在功能特徵方面,X3D 繼承了 VRML 的特性,支援 VRML 的格式內容,可與 VRML 的瀏覽器及工具軟體相容,另外,X3D 強化了立體及影音的功能,並結合 XML 標準與網路建立良好的溝通平台[3]。

X3D 的標準目前仍在持續改善中,但基於 VRML 過去的輝煌歷史,已有一些研究採用 X3D 得到不錯的成果,例如, Kim [4] 運用了 X3D 及 XML 技術來建構可以展現具有隱含個人風格的 3D 立體模型, Tsai [5] 將 X3D 運用於教育方面,建構出具有 3D 動力學與流體力學的虛擬實境,藉由 X3D 來增加學習者與課程之間的互動,至於 Liu [6]則提出一個 X3D 的延伸模組,該模組可經由數學函數來定義物體的幾何形狀、顏色和 3D 紋理等。

基於目前相關之研究成果,發現 X3D 的技術已漸趨於成熟,因此本研究選擇使用 X3D 虛擬實境程式語言作為研究工具,研究的過程簡述如下,首先推導出薄膜控制方程式的解(薄膜位移方程式),然後依據解的方程式

建立 X3D 程式碼，最後以適合的瀏覽器展現薄膜上下振動的成果。

貳、研究方法及步驟

本研究的目的是以 X3D 來模擬圓形薄膜振動變形，研究的開端為圓形薄膜之位移方程式的推導，藉由推導出的位移方程式，可描述圓形薄膜於變形後的空間位置，而為了簡化本研究及彰顯 X3D 在本研究的地位，因此在圓形薄膜之邊界條件的選擇，乃以簡單化為主，期能求得解析解，在求得圓形薄膜的位移方程式之後，下一個步驟為編輯 X3D 虛擬實境程式語言，X3D 程式語言雖然可以採用一般的文書處理軟體加以編輯，但因為 X3D 的語法結構較為複雜，其中包含多種及多重的 Node 及 Route，且又是 XML 的格式，為簡化編輯過程及避免錯誤，故採用 X3D-Edit 為編輯工具，在編輯完畢 X3D 程式碼後，最後交由 BS Contact 瀏覽 X3D 程式，同時將圓形薄膜振動的動態圖形顯示在電腦螢幕上，本研究過程的流程架構如圖 1 所示。

參、圓形薄膜振動方程式

二維薄膜振動現象是一個常見且經典的數學問題，應用範圍也很廣，例如：鼓面等，

它的基本原理來自一維的繩索振動問題，在本研究中為了數學分析上的簡便，因此在薄膜的振動模型的建構上，做了如下三點的假設：1. 假設振動薄膜之密度分佈均勻（即單位面積的質量相等），2. 振動薄膜被固定在 x - y 平面上，無異於單位長度之張力 T 皆相同，3. 振動位移函數 $u(x,y,t)$ 在振動時與薄膜大小比較下非常小。

圓形薄膜的振動方程式是源自於矩形薄膜的振動方程式，藉由更改直角座標系統成為極座標系統而得到，矩形薄膜振動方程式如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$u = 0, \text{ 位於邊界} \quad (2)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (3)$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad (4)$$

其中， $c^2 = \frac{T}{\rho}$ ， T 為單位長度的力量， ρ 為薄膜的密度。接著，為了將(1)式改為極座標的形式，因此引入兩個新的變數 r 和 θ ，它們和 x 與 y 的關係如下：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right), \quad (5)$$

因此， x 和 y 亦可以用 r 和 θ 表示如成為：

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (6)$$

將(6)式代入(1)式，亦即以 r 和 θ 取代(1)式中的 x 和 y ，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right), \quad (7)$$

$$c^2 = \frac{T}{\rho},$$

(7)式所代表的是圓形的薄膜振動方程式，因為若假設該圓形薄膜的半徑為 R ，且相關於圓形薄膜方程式的解 u 若假設為旋轉對稱 (rotationally symmetric) 時，則 (7) 式中的 $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ ，而且 u 將變為僅含 r 和 t 的函數 $u(r, t)$ ，因此，圓形薄膜振動方程式及相關的邊界條件可以重新定義為：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (8)$$

$$c^2 = \frac{T}{\rho},$$

$$u(R, t) = 0 \quad \square \quad t \geq 0, \quad (9)$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad (10)$$

$$u_t(r, 0) = g(r), \quad (11)$$

本文為了簡化研究過程，以突顯 X3D 的動態優勢，因此將圓形薄膜振動方程式求解過程簡化。首先，參考文獻[7]得到解的形式如下：

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos(\lambda_m t) + B_m \sin(\lambda_m t)) \times J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right), \quad (12)$$

其中， $\lambda_m = c \frac{\alpha_m}{r}$ ， J_0 為 0 階 Bessel 函數，定義為

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}, \quad (13)$$

令 $t=0$ ，則由(10)式可得

$$u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) = f(r), \quad (14)$$

上式中的 A_m 為屬於 Fourier-Bessel 級數之係數，因此在本薄膜的幾何條件下，可表示如下：

$$A_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) dr \quad (15)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

在此，舉了一個 Kreyszig[7]的例子：薄膜的半徑為 1ft，密度為 2slug/ft²， $T=8$ lb/ft，初始速度為 0，初始位移為

$$f(r) = 1 - r^2 \text{ [ft]}, \quad (16)$$

由上述的條件可得：

$$c^2 = \frac{T}{\rho} = \frac{8}{2} = 4, \quad A_m = \frac{8}{\alpha_m^3 J_1(\alpha_m)}$$

因為初始速度為 0，所以 $B_m = 0$ ，經由一系列的處理，可得最後的結果：

$$u(r, t) = 1.108 J_0(2.4048r) \cos(4.8097t) - 0.140 J_0(5.5201r) \cos(11.0402t) + 0.045 J_0(8.6537r) \cos(17.3075t) - \dots \quad (17)$$

於(17)式中， $u(r, t)$ 為薄膜表面之位移方程式，其中之變數 r 可以依照(6)式得到 x 軸及 y 軸方向的位移量 $r \cos \theta$ ， $r \sin \theta$ ，而 $u(r, t)$ 為 z 方向

的位移量，如此就可以得到 xyz 三度空間的薄膜變形模擬狀態，將上述的結果撰寫成 X3D 程式碼，於執行過程中，即可看出圓形薄膜振動變形的狀況。

肆、以 X3D 構建圓形薄膜動態變形圖

圓形薄膜振動位移函數於上一章節求得後，本章節接續建構以 X3D 為程式碼的圓形薄膜振動動態變形圖型，X3D 程式語言的編輯架構如下述，首先以 Background 節點建構虛擬實境背景顏色，接著編輯 Script 節點，Script 節點可執行嵌入式程式語言 ECMAScript，藉由 ECMAScript 程式語言的協助，可將上一結果，透過 PROTO 節點，以數據的型態將位移函數(17)的資料傳遞給 X3D，由於位移函數資料會隨著時間改變，因此在最後的圓形薄膜振動會以動態的方式呈現，在 X3D 的作業下，將上述所得的資料以 NurbsSurface 節點呈現出具有圓形薄膜振動動態變形圖型。綜而言之，編輯 X3D 虛擬實境程式語言的建構圖如圖 2 所示。

由於所撰寫的 X3D 程式無法直接執行，必需藉由瀏覽器才能觀看結果，故本研究選用 BS Contact 來瀏覽 X3D 程式，以呈現圓形薄膜振動動態變形之圖型。

方程式(17)為薄膜動態位移圖形截圖，若取時間變數 t 的間距 $0 \sim t_1$ 為一薄膜由平靜至最高點而後恢復平靜的週期時間，依時間 $t = 1/8 t_1$ 、 $1/4 t_1$ 、 $3/8 t_1$ 及 $1/2 t_1$ 之 $u(r,t)$ 截圖如圖 3~圖 6 所示。

伍、X3D 瀏覽器軟體

由於目前並沒有編譯器可以將 X3D 程式語言編譯為執行檔，而且同時為了維持 X3D 的跨平台性，因此謹能以具有直譯功能的瀏覽器執行，也因為如此，瀏覽器的選擇及電腦硬體的執行速度，關乎模擬的效果及效率，目前可瀏覽 X3D 虛擬實境程式的瀏覽器有 BS Contact、Flux Player、FreeWRL、instant reality、Xj3D、Octaga 和 Vcom3D 等，而這些瀏覽器都有其可執行之平台及優缺點，本研究選用的 X3D 瀏覽器為 BS Contact，主要因其影音的支援度最佳，該瀏覽器由德國 Bitmanagement 公司開發，目前最新的版本為 7.1 版，BS Contact 雖屬商業性質軟體，但如果運用在非商業性質領域，則可免費使用，且沒有功能和使用時間的限制，此外，另一考量因素則是它可直接透過 PC 的輸出或輸入設備，達到視覺化及虛擬實境場景的效果，本研究基於上述因素的考量，乃選擇使用 BS

Contact 為 X3D 的瀏覽器。

陸、結論

本研究採用虛擬實境之 X3D 程式語言，展現出薄膜上下振動的現象，由於本研究採用事先求解的方式，因此其物理性質及相關邊界條件已為固定，未來希望能夠將其物理性質及邊界條件修改為變動方式，配合數學軟體即時求出薄膜方程式的解，最後將結果以 X3D 表現出來，達到虛擬實境互動的目的。

本研究運用圓形薄膜振動位移函數與 X3D 結合，展現出圓形薄膜振動變形的動態性，此一成果證明虛擬實境程式語言 X3D 可以推廣至其他科學界的物理行為，藉由 X3D 與動態數學函數的結合，建立一個具有即時運算的環境，呈現出真實感的虛擬實境，由於本研究的嘗試運用及突破，其他可以數學化的物理現象皆可循此模式，利用 X3D 呈現其物理現象或特性。

X3D 雖然承襲了 VRML 的性質，但其相關的學習參考資料並不多，除本論文所提及的參考資料外，讀者亦可參考文獻[8, 9, 10]，另外，有關 X3D 的規範及範例亦可至 Web3D 聯盟網站參閱。

參考文獻

1. Sherman, W. R. and Craig, A. B.,

Understanding Virtual Reality: Interface, Application, and Design, Elsevier Science, USA, 2003.

2. McMenemy, K. and Ferguson, S., A Hitchhikers Guide to Virtual Reality, A K Peters, Ltd., MA, USA, 2007.

3. Brutzman, D. and Daly, L., X3D: Extensible 3D Graphics for Web Author, Elsevier Inc., USA, 2007.

4. Kim, T. and Fishwick, P. A., "A 3D XML-Based Customized Framework for Dynamic Models," Proceedings of the Seventh International Conference on 3D Web Technology, 2002, pps.103-109.

5. Tsai, J. F., Kouh, J. S. and Chen, L., "Constructing the Simulation Examples for the Courses of Dynamics and Fluid Mechanics by X3D," Ocean '04 - MTS/IEEE Techno-Ocean '04: Bridges Across the Oceans- Conference Proceedings, 2004, pp. 573-577.

6. Li, Q. and Sourin, A., "Function-Based Shape Modeling and Visualization in X3D," Proceedings of the Eleventh International Conference on 3D Web Technology, 2006, pp. 131-141.

7. Kreyszig, E. (2006), Advanced Engineering Mathematics, 9th Ed., John Wiley & Sons, USA.

8. Geroikenko, V. and Chen, C., Visualizing Information Using SVG and X3D, Springer-Verlag, UK, 2005.

9. 張金釗, 張金銳 和 張金鎬, X3D 虛擬現實設計：第二代立體網絡程序設計語言, 電子工業出版社, 中國, 2007。

10. 張金釗, 張金銳 和 張金鎬, X3D 立體動畫與遊戲設計：第二代立體網絡程序設計語言, 電子工業出版社, 中國, 2008。

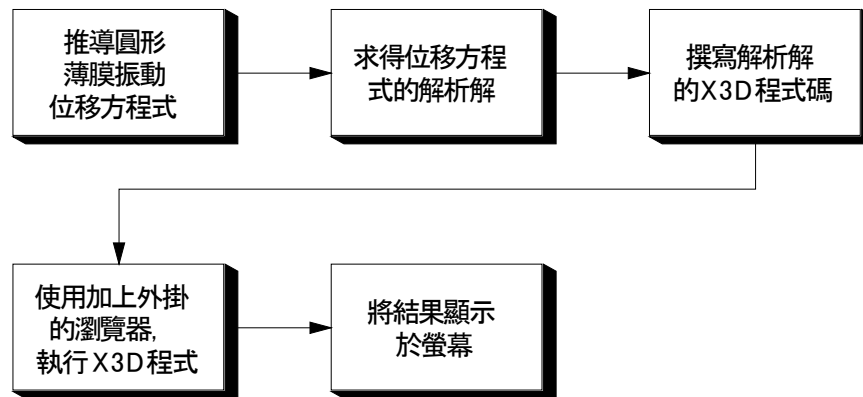


圖 1 研究流程架構圖

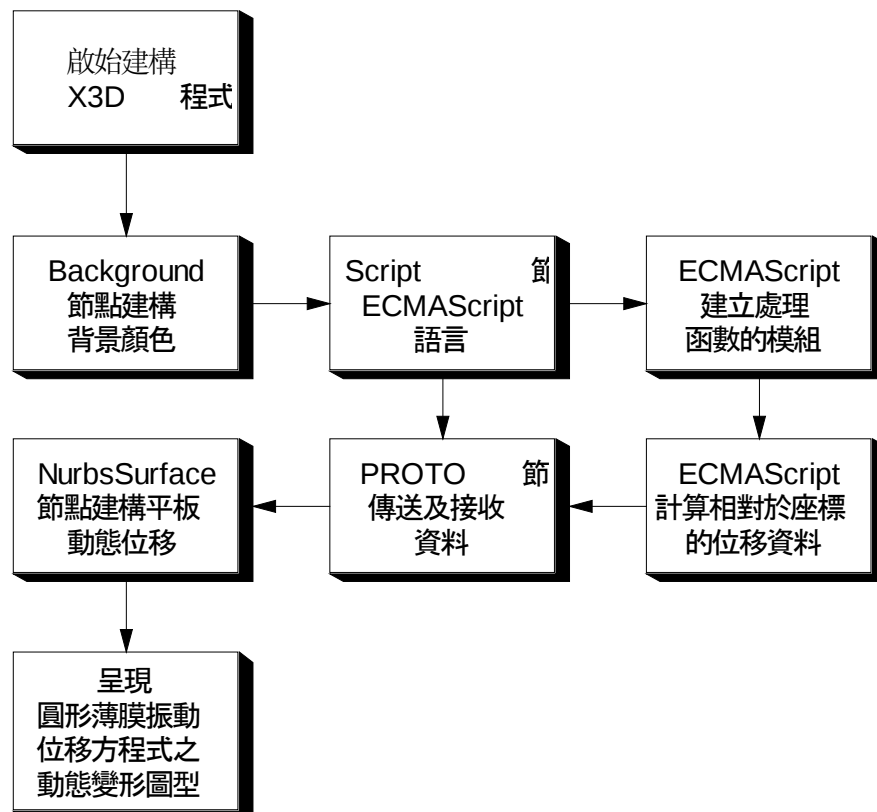


圖 2 X3D 虛擬實境程式語言建構圖

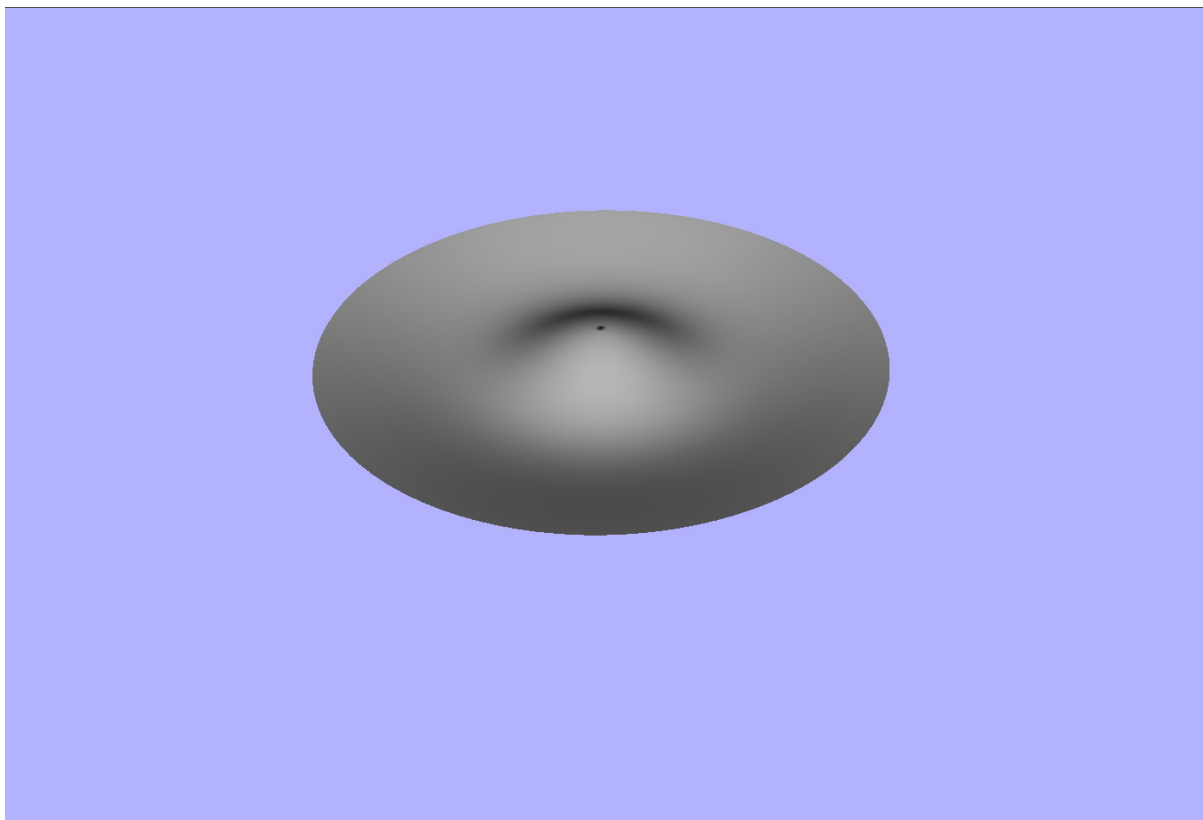


圖 3 圓形薄膜振動 $u(r,t)$ 截圖一， $t=1/8 t_1$

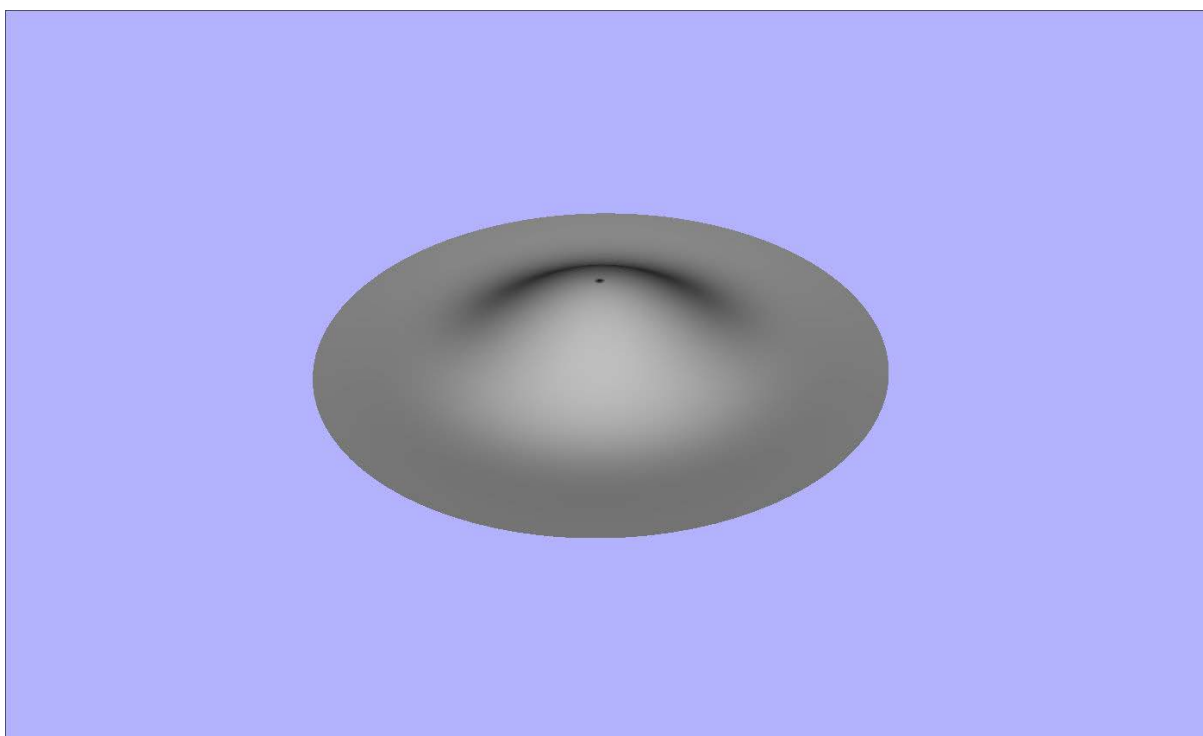


圖 4 圓形薄膜振動 $u(r,t)$ 截圖二， $t=1/4 t_1$

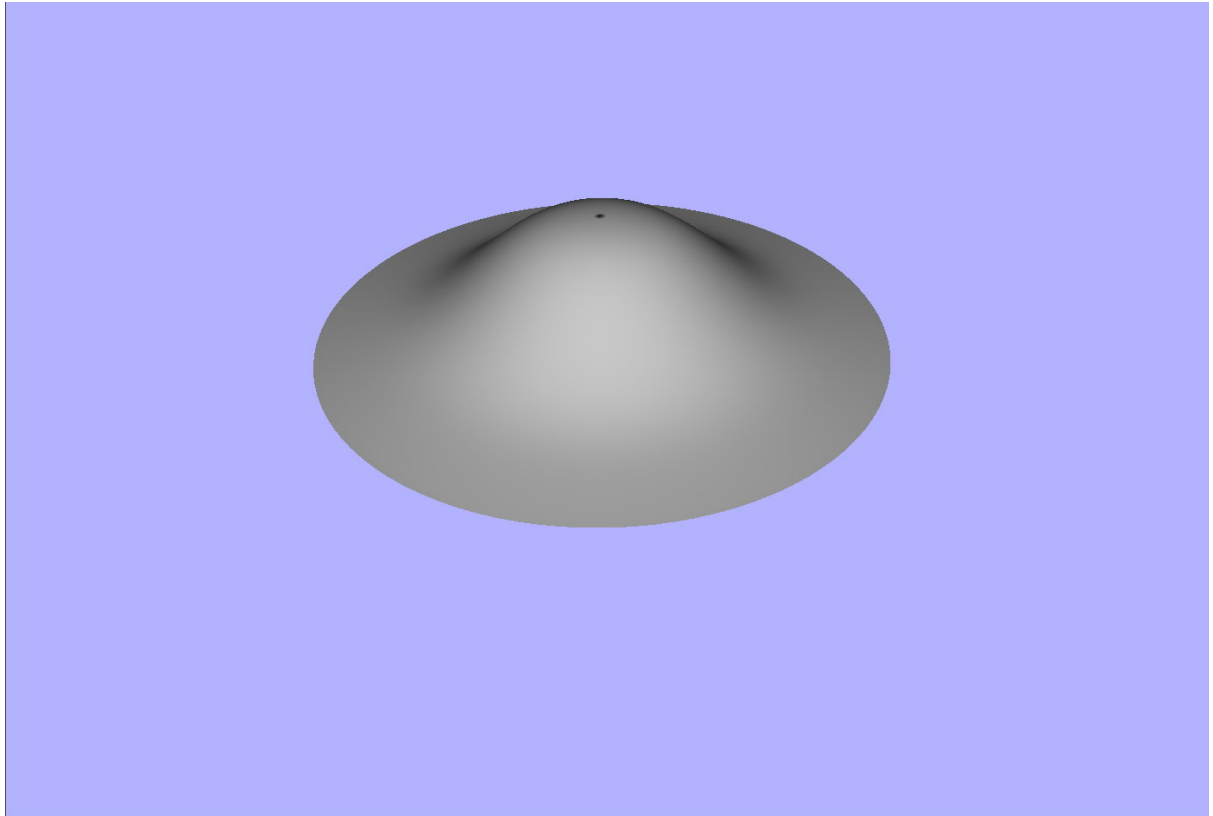


圖 5 圓形薄膜振動 $u(r,t)$ 截圖三， $t=1/4 t_1$

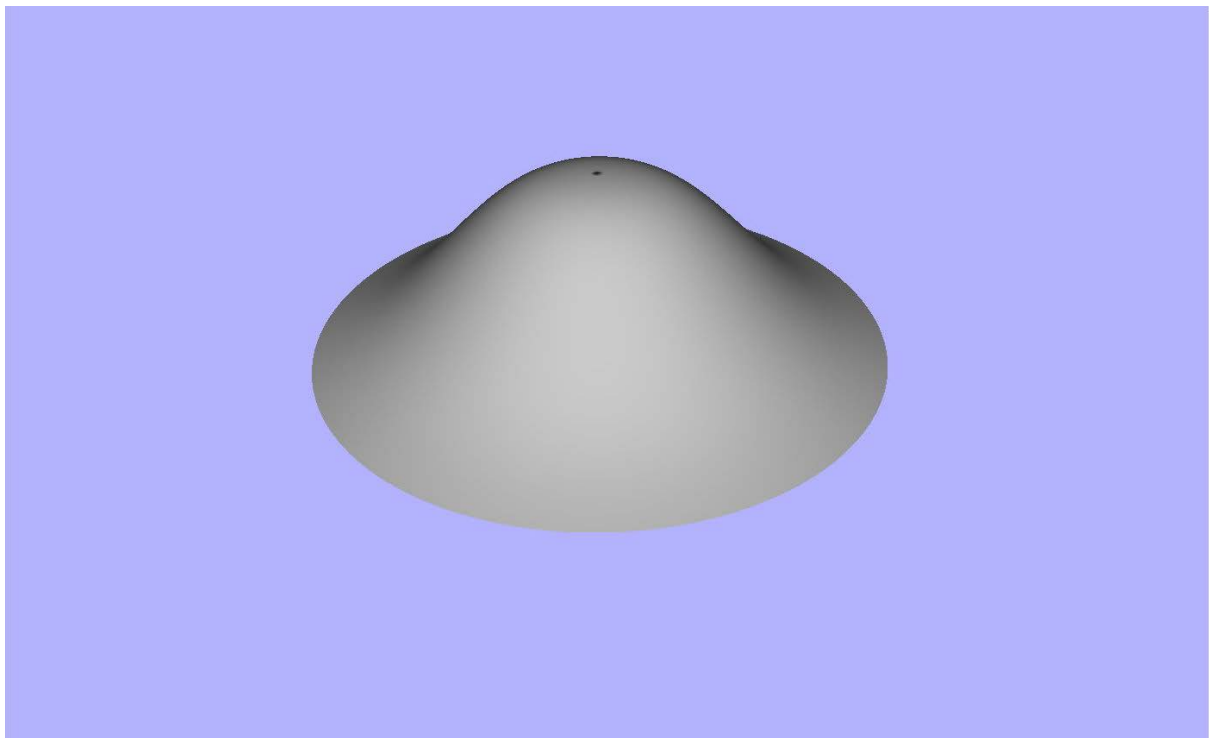


圖 6 圓形薄膜振動 $u(r,t)$ 截圖四， $t=1/2 t_1$

