

撓性冪函數數值積分法在類比控制器離散化之應用 Application of flexible power function numerical integration method on converting an analogue controller to its discrete-time form

柳復華，壽鶴年，林麗鳳
Fu-Hwa Liu, Ho-Nien Show, Lih-Feng Lin
空軍航空技術學院航空通訊電子系
Department of Aviation & Communication Electronics
Air Force Institute of Technology

摘要

一個新的取樣資料系統其控制器離散化的方法被提出，由於這個方法是根據實際的反應曲線而設計的，所以在離散化系統時顯得更為有效用。在所提方法之連續到離散的轉換關係式中有一冪次參數的設計其可根據系統的模式和取樣週期的大下來調整。當一適當的冪次參數被選取去離散化一受控系統時，相較於原始的連續系統的響應，新的離散系統除了有不錯的響應性能外；並且可以容忍以相對較大的取樣週期完成連續資料的被取樣。一個實例將被模擬以驗證本方法之有效性。

關鍵字：離散化、轉換關係式、取樣週期

Abstract

A novel discretization method is proposed to convert an analog controller to its corresponding counterpart for the sampled-data system. This method is suitable for the actual response curve, so it can be more effective in discretizing a designed analog system. In the transformation of proposed method there is a flexible power order parameter n which can be turned in accordance with system model and sampling period. Thus a suitable n in our proposed transformation will be found and used to make the discrete response of a controlled system can be more precisely match to the original analog response. The discrete-time controller via proposed transformation with a suitable n not only has a good performance for its originally continuous-time response but also it can tolerate a comparatively large sampling period of the discrete-time system. An illustrated example is simulated to demonstrate the effectiveness of these results.

Keywords: discretization, transformation, sampling period

一、簡介

大部分的控制器是設計在連續時間下[1,2]，但因數位控制的愈來愈普遍與容易，使得設計在連續時間的控制系統必須轉換成其等效的離散形式以方便數位計算機進行數位控制，而其中最關鍵的部分就是類比控制器的離散[3,4]。

一個類比控制器的最初設計是為了能滿足系統在連續時間下的性能表現，但其數位化後的響應卻常因數位化轉換過程中不可避免的誤差而有所偏離，且那偏離的現象在取樣週期不夠小時將更

是明顯。然而，在實際工程系統的應用上，數位化控制器對取樣週期的選擇常是需要有較大容忍度的[5]，若只限於小的取樣週期去做離散化將是不切實際的。

在本論文中，一個新的類比控制器離散轉換的方式將被提出，並且會得到一個可隨取樣週期大小及系統模型而彈性調整的轉換關係式。此外，一個離散的性能指標函數也會被定義以方便對各種離散方法作性能的比較。最後將以一個例子去驗證所提方法的有效。

二、數位化模型的轉換關係式

考慮一類比控制器其轉移函數模型如下

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a}{s+a} \quad (1)$$

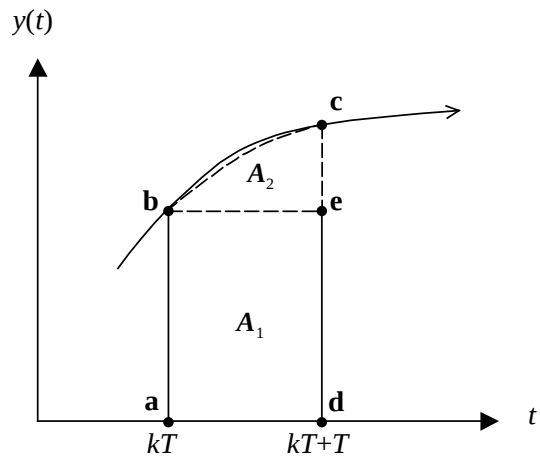
其中 a 是常數，而上式轉移函數的微分方程型式是

$$\frac{du(t)}{dt} + au(t) = ae(t) \quad (2)$$

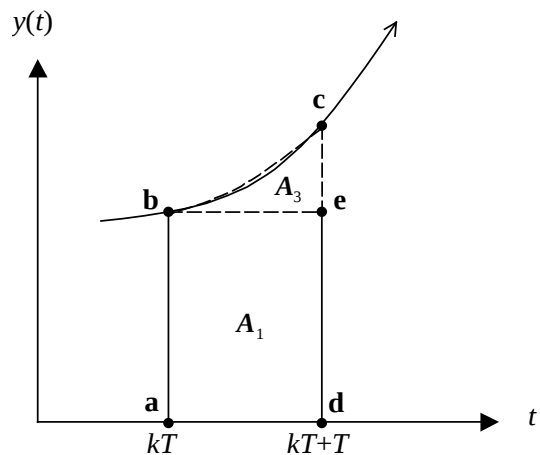
若一個取樣週期 T 被使用去決定 $u(t)$ ，則式(2)可表示成如下的差分型式

$$u(kT+T) - u(kT) = -a \int_{kT}^{(k+1)T} u(t) dt + a \int_{kT}^{(k+1)T} e(t) dt \quad (3)$$

式(3)右邊的每一連續時間積分項的值，有數種數值積分方式可計算得到[6,7]，例如著名的雙線性(亦稱梯形)數值積分法其是假設在積分區間內的資料其幾何分布總是成一條直線，若所有取樣資料其在連續時間的積分項中確實都是分布成一條直線或是接近於直線的曲線，那麼使用雙線性法就會得到相對較少的離散誤差和相對較好的離散結果。然而，真實的情形是在積分區間內其資料的幾何分布卻常是一個有弧度的曲線，且弧度的大小會隨著不同的系統模型和取樣週期而改變。因此，使用雙線性法對於一個使用相對較大一點取樣週期的系統而言是並不適合的，因其在離散的過程中會產生相對較大的誤差。若式(3)右邊的每一積分項的幾何分布是一個上凸型的曲線如圖一(a)所示，那麼其積分項的面積可由一矩形面積 A_1 (面積 $abed$) 和一上凸近似曲線面積 A_2 (面積 bce) 得到；若其幾何分布是一個上凹型的曲線如圖一(b)所示，那麼其積分項的面積可由一矩形面積 A_1 和一上凹近似曲線面積 A_3 得到。面積 $A_1 = T \cdot y(kT)$ ，而面積 A_2 和 A_3 則可藉一可調的冪函數曲線去逼近真實響應曲線後，再積分此冪函數曲線的面積而得到。



圖一(a)、上凸型弧度曲線積分

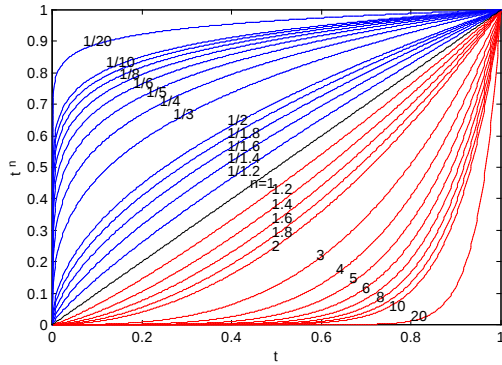


圖一(b)、上凹型弧度曲線積分

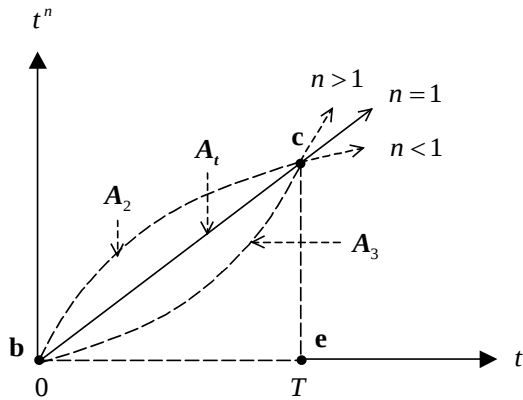
首先，令 $f(t)$ 是一撓性冪函數且被定義如下

$$f(t) = t^n \quad (4)$$

其中 n 是冪次變數，而 $f(t)$ 隨不同 n 值在 $0 < t < 1$ 的響應如圖二所示，當不同的 n 值被使用將可以分別形成不同弧度的曲線，而當一個適當的 n 值被選擇時，將能有助於我們去得到一個最逼近於真實響應曲線的冪函數曲線，而由這逼近的冪函數曲線所計算出來的面積 A_2 (或 A_3)，相對也會有最小的積分誤差，當其與其他的數值積分方式去作比較時。



圖二、撓性冪函數隨冪次變數 n 變化之曲線圖



圖三、上凸型冪函數面積 A_2 ($n < 1$) 與上凹型冪函數面積 A_3 ($n > 1$)

如圖三所示，一個上凸型曲線面積 A_2 ($n < 1$) 或上凹型曲線面積 A_3 ($n > 1$)，其經由撓性冪函數積分法去計算得到的方式如下：

令 A_1 ($n=1$) 表 $\triangle bce$ 的面積，並且重新定義令 b 點和 e 點的水平座標分別是時間 $t=0$ 和 $t=T$ ，同時令 c 點是撓性冪函數 t^n 相對於 $t=T$ 之值，則可求得三角形 A_1 的面積為

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{be} \cdot \overline{ce} = \frac{1}{2} \cdot T^{n+1}$$

和上凸型曲線面積 A_2 為

$$A_2 = \int_0^T t^n dt = \frac{1}{n+1} T^{n+1}$$

和上凹型曲線面積 A_3 為

$$A_3 = \int_T^e t^n dt = \frac{1}{n+1} T^{n+1}$$

A_2 和 A_3 的數學表示相同，而與 A_1 的比值是

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_1} = \frac{2}{n+1}$$

在圖一， $A_1 = \frac{1}{2} T [y(kT) + y(kT+T)]$ ，則

$$A_2 = A_3 = \frac{2}{n+1} A_1 = \frac{1}{n+1} T [y(kT+T) - y(kT)] \quad (5)$$

所以 $y(t)$ 在一個取樣區間的積分面積是

$$\begin{aligned} \int_{kT}^{kT+T} y(t) dt &= A_1 + A_2 = A_1 + A_3 \\ &= T \left[\frac{n}{n+1} y(kT) + \frac{1}{n+1} y(kT+T) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

根據這樣的幾何方式，式(3)可以被計算如下

$$\begin{aligned} &u(kT+T) - u(kT) \\ &= -aT \left[\frac{n}{n+1} u(kT) + \frac{1}{n+1} u(kT+T) \right] \\ &\quad + aT \left[\frac{n}{n+1} e(kT) + \frac{1}{n+1} e(kT+T) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Z 轉換(7)式得到

$$\begin{aligned} &\left[(z-1) + aT \left(\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} z \right) \right] U(z) \\ &= aT \left(\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} z \right) E(z) \end{aligned} \quad (8)$$

則其在離散時間下的轉移函數為

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{a}{\frac{n+1}{T} \cdot \frac{z-1}{z+n} + a} \quad (9)$$

比較(1)式和(9)式，得到 s 和 z 的關係式為

$$s = \frac{n+1}{T} \cdot \frac{z-1}{z+n} \quad (10)$$

式(10)即是一個新的經由撓性冪函數數值積分法所得到從連續時間定義域(s-domain)到離散時間定義域(z-domain)的轉換關係式。

在式(10)的轉換關係式中，當我們將冪次變數 n 逐漸改變時，發現了一些有趣的現象如下

當 $n=0$ ，式(10)變成

$$s = \frac{z-1}{Tz} \quad (11)$$

那是後向(backward)數值積分法轉換關係式的型式。

當 $n=\infty$ ，式(10)變成

$$s = \frac{z-1}{T} \quad (12)$$

那是前向(forward)數值積分法轉換關係式的型式。

當 $n=1$ ，式(10)變成

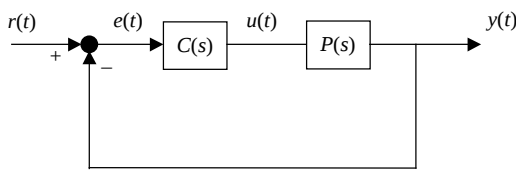
$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (13)$$

那是雙線性(bilinear)數值積分法的轉換關係式的型式。

根據以上的敘述，當一個適當的冪次參數 n 在所提出的轉換關係式中被使用時，其不僅可以表示成其他數種眾所週知的數值積分法的轉換關係式型式，同時也可以產生一個新的轉換關係式，使其在被使用去轉換一個已經被設計好的類比控制系統時能夠產生相對更少的離散誤差。

三、實例驗證

考慮一已設計完成的受控系統[8]如圖四所示



圖四、連續受控系統

其中，參考輸入 $r(t)$ 為一單位步階函數，控制器是

$$C(s) = \frac{s^2 + 10.42s + 20}{s^2 + 32.44s + 20}$$

受控體是

$$P(s) = \frac{20}{s(1 + \frac{s}{10})(1 + \frac{s}{30})}$$

首先，經由雙線性轉換關係式所得之控制器離散等式為

$$C_b(z) = C(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{N_b}{D_b}$$

其

$$N_b = (20T^2 + 20.84T + 4)z^2 + (-8 + 40T^2)z + (20T^2 - 20.84T + 4)$$

$$D_b = (20T^2 + 64.88T + 4)z^2 + (-8 + 40T^2)z + (20T^2 - 64.88T + 4)$$

其次，經由所提方法之轉換關係式所得之控制器離散等式為

$$C_p(z) = C(s) \Big|_{s = \frac{n+1}{T} \frac{(z-1)}{(z+n)}} = \frac{N_p}{D_p}$$

其

$$N_p = [(n+1)^2 + 10.42(n+1)T + 20T^2]z^2 + [-2(n+1)^2 + 10.42(n^2 - 1)T + 40nT^2]z + [(n+1)^2 - 10.42n(n+1)T + 20n^2T^2]$$

$$D_p = [(n+1)^2 + 32.44(n+1)T + 20T^2]z^2 + [-2(n+1)^2 + 32.44(n^2 - 1)T + 40nT^2]z + [(n+1)^2 - 32.44n(n+1)T + 20n^2T^2]$$

最後，經由 Boxer-Thaler 法[9]所得之控制器離散等式如下：

因 Boxer-Thaler 轉換關係式之一次方積分子和二次方積分子分別為

$$s^{-1} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

和

$$s^{-2} = \frac{T^2}{12} \frac{z^2 + 10z + 1}{(z-1)^2}$$

而 $C(s)$ 可重寫成

$$C(s) = \frac{1 + 10.42s^{-1} + 20s^{-2}}{1 + 32.44s^{-1} + 20s^{-2}}$$

將 Boxer-Thaler 的 s^{-1} 和 s^{-2} 代入 $C(s)$ 得到

$$C_B(z) = \frac{1 + 10.42 \frac{T(z+1)}{2(z-1)} + 20 \frac{T^2(z^2 + 10z + 1)}{12(z-1)^2}}{1 + 32.44 \frac{T(z+1)}{2(z-1)} + 20 \frac{T^2(z^2 + 10z + 1)}{12(z-1)^2}} = \frac{N_B}{D_B}$$

其

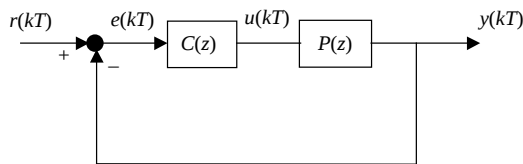
$$N_B = (20T^2 + 62.52T + 12)z^2 + (200T^2 - 24)z + (20T^2 - 62.52T + 12)$$

$$D_B = (20T^2 + 194.64T + 12)z^2 + (200T^2 - 24)z + (20T^2 - 194.64T + 12)$$

使用零階保持(zero-order hold)，得到受控體的離散模型

$$P(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} P(s) \right\}$$

其整個等效離散受控系統的模型如圖五



圖五、等效離散受控系統

且此離散受控系統的輸出為

$$y(kT) = Z^{-1} \left\{ \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} \cdot R(z) \right\}$$

將 $C_b(z)$ 、 $C_B(z)$ 和 $C_p(z)$ 各自代入 $y(kT)$ ，得到 $y_b(kT)$ 、 $y_B(kT)$ 和 $y_p(kT)$ ，其分別是經由雙線性轉換法、Boxer-Thaler 轉換法及所提轉換法的輸出響應。為了公平的比較離散時間響應 $y_d(kT)$ (即 $y_b(kT)$ 、 $y_B(kT)$ 和 $y_p(kT)$) 和原始連續時間響應 $y_c(t)$ 接近的程度，一個性能指標函數 J [10] 被定義如下：

$$J = \int_0^{t_f} [y_c(t) - y_d(kT)]^2 dt$$

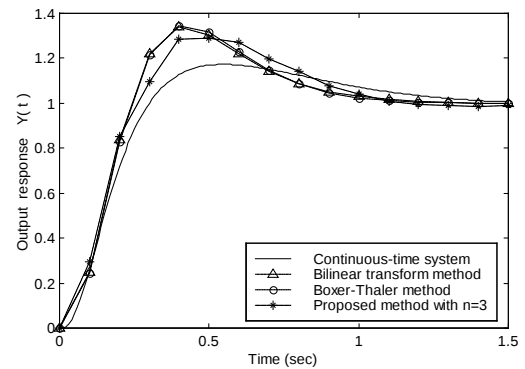
$$\equiv \sum_{k=0}^{k_f} [y_c(t=kT) - y_d(kT)]^2$$

其 $k_f = \text{int} \left(\frac{t_f}{T} \right)$ 是整個響應區段內的最後一個取樣點，分別將 $y_b(kT)$ 、 $y_B(kT)$ 和 $y_p(kT)$ 代入性能指標函數 J 中的 $y_d(kT)$ ，三種輸出誤差和 J_p 、 J_b 和 J_B 將分別被計算出，並藉以去判斷何者是有最接近於原始類比系統響應的離散輸出。

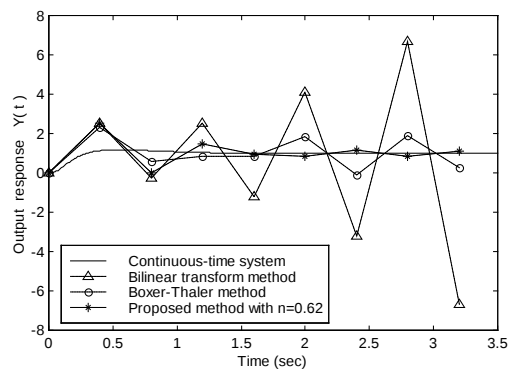
所有模擬的結果都被包含在表一，當中有 $(T=0.1, k_f=30)$ 、 $(T=0.15, k_f=20)$ 、 $(T=0.2, k_f=15)$ 、 $(T=0.25, k_f=12)$ 、 $(T=0.3, k_f=10)$ 、 $(T=0.35, k_f=10)$ 、和 $(T=0.4, k_f=8)$ 等八種取樣週期和取樣點數的組合被選取去計算此三種離散方法的誤差和。同時，將 $(T=0.1, k_f=15)$ 和 $(T=0.4, k_f=8)$ 的輸出響應分別顯示於圖六和圖七以便三種離散方法的彼此比較。

在圖六($T=0.1$)，此三種離散輸出響應是接近的，此外，當一個足夠小的取樣週期(像是 $T=0.01\text{sec}$)被使用在此例時，三條離散的響應曲線近乎是重疊且皆與連續響應曲線非常地接近。另如表一所示，發現當取樣週期遞增時，三種離散誤差指標 J_b 、 J_B 和 J_p 也跟著增加，但遞增的幅度， J_b 是最大， J_B 其次，而選擇一適當 n 值的 J_p 則是最小。而在圖七($T=0.4$)顯示， J_b 已經發散， J_B 和 J_p ($n=0.62$) 雖皆收斂但 J_B 較 J_p 具有相對較大的誤差值，此結果揭露當一個適當的冪次參數於所提方法中被選取應用時，即可容忍以相對較大的取樣週期去完成資料的取樣。

從上述的模擬結果，顯示所提之方法確實能有效地應用在取樣資料系統的實現上。



圖六、取樣週期 $T=0.1(\text{sec})$ 的輸出響應比較



圖七、取樣週期 $T=0.4(\text{sec})$ 的輸出響應比較

四、結論

一個新的應用在被取樣資料系統其類比控制器數位重設計的方式被提出，由於所提的方法其設計的概念更接近於實際的響應曲線，所以在數位化一個已完成設計的類比系統時將相對會更為有效。而在所提的撓性冪函數數值積分法轉換關係式中其有一個可調整的參數，此一參數的最佳值

可透過去計算所要離散系統的性能指標函數值進而找尋到。而當一個適合的幕次參數值被選擇並使用在所提的方法中，其離散後的模型不僅能夠得到一個相對較接近於原始類比系統響應的取樣資料響應，且還能夠容忍以相對較大之取樣週期去完成資料的取樣。

對於某些數位重設計的系統，尤其是對那些因硬體限制導致取樣率必須相對較低的系統，所提之新的數位重設計的方法是值得去一試的，經由這篇論文所揭露的方法，一個有用且可實現的數位重設計系統將會被獲得。

五、參考文獻

- 1 B. C. Kuo, *Automatic Control System*, Prentice-Hall, Singapore, 1997.
- 2 Chen, C. T. *Analog and Digital Control System Design: Transfer-function, State-space, and Algebraic Method*, 2006 (Oxford University Press, New York).
- 3 J. S. H. Tsai, L. S. Shieh and J. L. Zhang, "An Improvement of the Digital Redesign Method Based on the Block-Pulse Function Approximation", *Circuits, Systems and Signal Processing*, Vol 14, No. 1, pp. 37-49, 1993.
- 4 Y. N. Rosenvasser, K. Y. Polyakov and B. P. Lampe, "Application of Laplace Transformation for Digital Redesign of Continuous Control Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 44, No.4, pp. 883-886, April 1999.
- 5 Chen, C. M. and Liu, F. H. The discrete-time equivalent of an analogue controller by the parabolic approach. *Proc. Instn. Mech. Engrs, Part I, journal of systems and control Engineering*, 2001; 215(I1), 29-36.
- 6 Chen, C. M., and Liu, F. H. The discrete-time equivalent of an analog controller by a compensated approach. *International Journal of System Science*, 2001, 32(3), 287-294.
- 7 C. F. Chen and L. S. Shieh, "An algebraic method for control systems design," *Int. J. Control*, Vol 11, No. 5, pp.717-739, 1970.
- 8 N. Rafee, T. Chen and O. P. A Malik, "Technique for Optimal Digital Redesign of Analog Controllers," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 5, No. 1, pp. 89-99, 1997.
- 9 R. S. Boxer and S. Thaler, "A Simplified Method of Solving Linear and Nonlinear Systems," *Proceeding of IRE*, pp. 89-101, 1956.
- 10 C. H. Wang, M. Y. Lin and C. C. Teng, "On the Nature of the Boxer-Thaler and Madwed Integrators and Their Applications in Digitizing a Continuous-Time System," *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 35, No. 10, pp. 1163-1167, 1990.

表一、不同取樣週期下的誤差和比較

Error \ T	$T = 0.1$	$T = 0.15$	$T = 0.2$	$T = 0.25$	$T = 0.3$	$T = 0.35$	$T = 0.4$
J_p	($n = 3$) 0.0870	($n = 2.4$) 0.1514	($n = 1.8$) 0.2220	($n = 1.3$) 0.3489	($n = 1.07$) 0.5621	($n = 0.84$) 1.1383	($n = 0.62$) 3.5634
J_b	0.1355	0.2411	0.3570	0.4581	0.5802	2.5318	129.99
J_B	0.1396	0.2555	0.4001	0.5692	0.8101	1.5868	5.0863