

保險業的新商機？

—論台灣企業年金保險

Is It a New Business Opportunity of the Insurer? —Taiwan's Enterprise Annuity Insurance

林麗鳳¹、陳勤明²、壽鶴年¹、柳復華¹

Lih-Feng Lin¹, Chen, Chin-Ming², Long-Life Show¹, Fu-Hwa Liu¹

¹Department of Aviation & Communication Electronics, Air Force Institute of Technology

¹ 空軍航空技術學院航空通訊電子系

²Department of Money and Banking, National Kaohsiung First University of Science and Technology

² 國立高雄第一科技大學金融系

摘要

退休金機制不僅攸關勞工退休生活經濟保障，其制度之良窳更衝擊勞動、金融市場，乃至國家整體經濟發展；故政府往往透過直接或間接的法令與機制，來建立退休金制度的運作。我國於2004年6月通過「勞工退休金條例」(Labor Pension Act)，隔年7月實施，條例中明訂勞工退休金之經營及運用，得委託金融機構辦理。換言之，企業可在相關條件下，透過向保險業投保企業年金保險(Enterprise Annuity)，來建構公司的退休金制度。

企業年金保險投保收益之高低，關係著勞工退休之生活保障；相對地，亦影響年金發行者之營運盈虧。本文依循勞退條例對企業年金商品的規範特性，建立年金保單之現金流量評估模型，並結合精算與數值演算方法，估計保單之收益(及收益率)。另一方面，透過模型參數的改變或給付型態的調整，分析保單收益的變化。本研究的結果除可作為企業、勞工參與年金保險計劃之參考，同時亦可提供保險業者甚至相關主管機關對於企業年金保單規劃之資訊與監理方向。

關鍵詞：勞工退休金條例、企業年金、保證收益率。

Abstract

The operating mechanisms of retirement pension fund not only are directly related to the welfare of retired labors, but also have great impacts upon labor market as well as financial market. On June 2004, the Labor Pension Act had been formally approved and been implemented on July 2005. This act clearly prescribes that a business entity shall purchase annuity insurance from a single insurer under some related regulations. In other words, enterprises are able to establish their own retirement pension systems through various annuity insurance schemes provided by insurers.

As a result, the yield rate of enterprise annuity insurance would play a safeguard role in promoting workers' lives after retirement, it would also pose great influence on the profit and loss of an insurer who promote the schemes. This study utilizes the main characteristics of a sample annuity insurance regulated in the Act to establish an evaluating

model on the cash flow of a annuity insurance. On one hand, we combines simulation techniques and actuarial methods in this model to estimate the yield and the yield rate; on the other hand, through changing the value of parameters and conditions of paying, we analyze the variations of the yield. The result of this study provides a good reference material for those enterprises and workers who are intended to participate in an annuity insurance, as well as for governing agencies to map out directions on information disclosure and governance.

Keywords : Labor Pension Act, enterprise annuity, guaranteed yield rate

1. 導論

就人口結構分析，台灣已於 1993 年 9 月達到聯合國世界衛生組織(World Health Organization，簡稱 WHO)所定義「高齡化社會」之標準，即 65 歲以上老年人口佔總人口數的比率超過 7%。根據行政院經建會人口推計資料顯示，至 2026 年老年人口比例更將突破 20.05%。面對人口老化的現象，政府不但必須針對勞動力不足提出因應政策，同時也要正視老年人口退休後的經濟生活保障問題。從個人財務規劃角度來看，將儲蓄轉換成退休所得，存在顯著的長壽風險；年金制度則是確保終身所得來源的重要方法之一。

2004 年 6 月 11 日，立法院三讀通過「勞工退休金條例」，確立以「個人退休金專戶制」為主，「年金保險制」為輔之體制，並結合民間保險公司之專業管理資源。按照政府規畫的勞退新制，員工可以選擇政府的勞退個人專戶，對於 200 人以上事業單位，二分之一以上勞工同意後，也可選擇壽險公司的勞退年金保單。能夠參與經營退休金市場並擔負起社會責任，對於保險業來說是極具積極且正面的力量，因此，保險公司如何發揮其擅長處理生命風險與長期資產負債管理之經驗，遂成為一重大議題。

依「勞工退休金年金保險保險人資格審核及管理辦法」，承辦年金保險的保險公司不限本土、外商，皆需信用評等公司（經保險主管機關認可者，如：中華信評、標準普爾、惠譽或穆迪等）評定為 A 級以上者，才可承辦。承辦業者也應符合保險法第 143 條

之 4 規定，自有資本與風險資本比率不得低於 200%；符合承辦資格的保險業者須備妥保單計畫書、經營計畫書等，送交勞委會、金管會審查通過後，即可開辦年金保險業務。勞委會將定期審核保險人資格，確保勞工權益。

勞工退休金條例之通過已喚醒大眾對退休規劃的檢討與重視，也提供壽險公司進入勞工退休金市場之商機。惟相較於一般商業年金保險，勞退保單受到的規範更為嚴苛，導致新制實施已逾兩年，民營保險公司對於企業年金保險商品的推出仍不熱衷。究其主因，除了投保條件門檻偏高，造成壽險公司尋找保戶不易外，收益保證的計算方式，要求帳戶基金每期投資報酬率不得低於當期兩年期定期存款利率的限制，也讓保險業者裹足不前。本文即著眼於保單收益的探討，依據示範條款，建構企業年金保單之現金流量評估模型，據此預估保單內部報酬率（Internal Rate Of Return, IRR），同時評估承保勞退年金保單之可能損益。

勞退保單之商品型態屬於收益保證之利率變動型年金，所以，投保者之收益，與契約期間之市場利率及保險公司的投資報酬情形產生鏈結。參與如此退休保險計劃，究竟可為投保者帶來多少收益，相信被保險人(勞工)與保單發行機構皆相當關心。過去，攸關收益保證保單之研究，多著眼於單連保單(unit-linked policies)或變額壽險(variable life insurance contracts)商品。自 Brennan and Schwartz (1976)以降，許多學者紛紛針對不同型態的投資保證保單提出研究。（諸如：

Grosen and Jørgensen, 2000, 2002; Bacinello, 2001, 2003; Guill'en, M., Jørgensen, P.L., and Perch-Nielsen, J., 2004; Haberman, S., Ballotta, L., and Wang, N., 2003; Tanskanen and Lukkarinen, 2003; 以及 Daniel Bauer, Rüdiger Kiesel, Alexander Kling and Jochen Ruß, 2006, ...等)。其中, Grosen and Jørgensen (2000)所探討的分紅保單, 其紅利的發放採固定保證水準外加一超額報酬的參與給付。Grosen and Jørgensen 運用隨機模擬的方法求得保證給付之紅利帳戶價值。Bacinello (2001)則以選擇權的觀點, 採 Black-Scholes 模型對於收益保證分紅保險契約價值求得一封閉解。Daniel et al. (2006)以德國保險市場為例, 探討一保費躉繳, 期末給付紅利之定期險; 保險公司將資產報酬高於收益保證之部份, 依參與比率給付保戶, 其餘視為股利發放股東。文中採蒙地卡羅演算(Monte Carlo algorithms)模擬公司資產價值之變化, 並據此評估保單價值。然而, 這些模型並無法直接援引分析我國企業年金保單, 其間除了保單型態與收益分配方式有別外, 企業年金於契約期間採非固定保證收益率型態更是主因。以下, 將針對條例所規範的保單特性, 建構符合我國企業年金之投保收益評估模式。

2. 研究模型建立

企業年金投保收益率之評估方法即為估算該保單之內部報酬率。而此報酬率之計程算, 需先求得保單契約期間之期望現金流量, 以及影響此現金流量之利率與資產報酬變動過程。本節將陸續針對企業年金之保單型態、現金流量、收益率評估模式以及利率與資產動態模型做一介紹。

2.1 企業年金保險契約型態

壽險業所設計的勞退保單, 依據行政院金融監督管理委員會於2005年11月29日所公告之「勞退企業年金保單示範條款」, 其商品型態必須比照「利率變動型年金」的特性。舉例來說, 保單於年金開始給付前, 依各期

宣告利率計息累積保單價值, 並在年金開始給付日, 以其所累積之保單價值準備金, 依據當時預定利率及年金生命表計算可以領取之第一期年金金額。第二期開始, 每期可領取之年金金額則以前一期可領取之年金金額乘以當年度之「調整係數」而得之。上述的精算基礎(如: 宣告利率、預定利率、退休金調整係數等)必需參考公司投資報酬能力來訂定; 同時, 保單各期收益率必須符合最低收益保證(目前訂為兩年期定期存款利率)的規定。除此之外, 條例中亦限制年金給付最低保證期間(被保險人若於保證期間內死亡, 保單受益人仍可續領年金至保證期間終了為止)。至於勞退保單所採用的生命表, 暫時採用壽險業的「年金生命表」, 假設終極壽命為110歲。不過, 勞委會未來將會核定勞工個人退休金適用的生命表。另外, 由於保險公司決定宣告利率時, 已經反映保險業務費用, 因此, 保險公司不得再向保戶收取附加費用。

2.2 保險契約期間現金流量之探討

對於投保者而言, 企業年金保單於契約期間產生之現金流量有二, 一為各期繳納之保費現金流出, 另一為保險公司依約所為之現金流入(包含死亡或年金支付)。欲估計企業年金保險之各期年金給付額度, 首先需計算保險契約於退休金給付前之帳戶價值。而保單價值準備金的計算, 為各期提繳保費及移轉退休金以宣告利率計算之本息, 扣除已支領之年金:

$$V_{x+t} = \sum_{i=1}^t P_{x+i} \prod_{j=i}^t (1+c_{x+j}) - \sum_{i=x'-x}^t A_{x+i} \prod_{j=i}^t (1+c_{x+j});$$
$$c_{x+j} = \max \{ \tilde{i}_{x+j} (\text{兩年定存利率}), \alpha \times \max[0, R_{x+j}] \} \quad (1)$$

式中,

V_{x+t} : 保單第 t 年度之帳戶價值; 被保人 x 歲投保, 存活至 $x+t$ 歲時之保單價值準備金。

P_{x+i} : 保單第 i 年度之保費及轉入退休金帳戶之金額。

A_{x+i} ：保單第 i 年度之退休金給付金額。

c_{x+j} ：保單第 j 年度之宣告利率，其水準係參考公司投資報酬能力並反映保險業務

費用後宣告，惟不得低於當年度之保證收益率(兩年定存利率)。

R_{x+j} ：保單第 j 年度之公司總資產報酬率。

α ：投資績效盈餘分配比率(參與率)。

根據(1)式的推估，可以求得各期所累積之保單價值準備金。若被保險人於退休金開始給付前死亡，保險公司需依請領日前一天之保單價值準備金返還指定受益人(未指定時，由遺屬請領之)。相反地，投保者將可領取附有保證給付期間的退休金。至於退休金給付金額則採利率變動型年金方式。其中，第一期可領取之退休金金額是以請領日前一日之保單價值準備金及依據當時之年齡、預定利率及年金生命表計算。因為「附有保證給付期間的生存年金」(假設保證給付期間為 G 年)可視為 G 年確定年金(Annuity Certain)與遞延 G 年之終身生存年金(Deferred Life Annuity)之和。所以，第一期退休金金額可表示為：

$$A_{x+t}|_{t=x'-x} (\equiv A_{x'}) = \frac{V_{x+t}}{\ddot{a}_{\overline{G}|} + \ddot{a}_{x+t}|_{t=x'-x}} = \frac{V_{x'}}{\ddot{a}_{\overline{G}|} + \ddot{a}_{x'}} \quad (2)$$

其中，

$V_{x'}$ ：退休金請領之日(被保人年齡為 x' 歲)前一天之保單價值準備金

$$\ddot{a}_{\overline{G}|} = \frac{1 - (1+i)^{-G}}{i \cdot (1+i)} \quad : \text{以預定利率}(i; i \geq \tilde{g}_{x'-1})$$

所計算之保證 G 年之退休金確定年金現值因子。

$$\ddot{a}_{x'} = \frac{1}{D_{x'}} \sum_{t=G}^{\infty} D_{x'+t} = \frac{N_{x'+G}}{D_{x'}} \quad : \text{以預定利率及}$$

預定危險發生率所計算保單(被保人年齡為 x' 歲)

於保證 G 年後之退休金現值因子。

(設 l_x 表生命表中 x 歲之生存人數；則

$$D_x = l_x \div (1+i)^x; \quad N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots)$$

退休金請領期間第二期開始可領取之退休金金額係以前一期可領取之退休金金額乘以當期「調整係數」而得之：

$$A_{x+t}|_{t=x'-x+1, x'-x+2, \dots} = A_{x+t-1} \cdot m_{x+t} \quad (3)$$

其中

$$m_{x+t} = \frac{1+k_{x+t}}{1+i}; (k_{x+t} \geq \tilde{g}_{x+t-1}) \quad : \text{計算第 } t \text{ 年度}$$

年金之調整係數。

2.3 保單收益率之評估

透過上一節的估算，我們可以掌握年金保單於被保險人生存(或死亡)下之各期現金流出(各年齡之保費繳納及移轉退休金； P_{x+t})與現金流入(死亡理賠給付金 V_{x+t} ，或年金 $A_{x'+s}$)。再根據生命表之死亡率統計值，可進一步計算各期現金流量的期望值：

$$E[CF_{age=x+t}] = (-{}_t p_x \cdot P_{x+t} + {}_{t-1|} q_x \cdot V_{x+t})_{\{0 \leq t < x'-x\}} + ({}_{x'-x} p_x \cdot A_{x+t})_{\{x'-x \leq t < x'-x+G\}} + ({}_t p_x \cdot A_{x+t})_{\{x'-x+G \leq t\}} \quad (4)$$

其中，

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \quad : x \text{ 歲經 } t \text{ 年尚生存機率。}$$

$${}_{u|n} q_x = \frac{l_{x+u} - l_{x+u+n}}{l_x} \quad : x \text{ 歲在 } u \sim u+n \text{ 年內死亡機率。}$$

若以 r^* 為折現率計算，使其期望現金流量之現值總合為零，則 r^* 即為此保單之內部報酬率；該內部報酬率，對於投保者而言為投保收益率，對於保單發行者來說，則可視為該保單每一元保費收入之資金取得成本。

$$\text{Let } \sum_t PV_{r^*} [E[CF_{age=x+t}]] = 0$$

then $IRR = r^*$ (5)

上述收益率之高低，源於公司資產投資結果及每期利率水準。因此，要評估保單收益率之前，則須先了解資產報酬與利率水準之隨機過程。尤其勞退保單之商品型態屬於

收益保證之利率變動型年金，保單收益率受到每期利率水準的影響最大，因此，使用適當的利率模型來進行保單收益評估，則為首要任務。

2.4 利率隨機過程

Vasicek(1977)首先將利率均數復歸(mean-reverting)的概念應用在利率模型中，因此 Vasicek 模型可以考量利率的均數復歸特性，但 Vasicek 模型的缺點在於會有負利率的可能。而 Cox, Ingersoll and Ross (1985)所提出一個具有均數復歸特性且修正負利率可能的新模型，因此，Cox et al., (1985)之利率模型(以下簡稱 CIR 模型)成為廣為使用於利率模擬的模型，本研究亦以 CIR 模型進行隨機利率之模擬，CIR 模型的隨機過程如下：

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + v\sqrt{r}dW \quad (6)$$

其中， r 表瞬間利率， κ 為均數復歸的速度， θ 為利率平均水準， v 為利率波動之調整係數， W 為 Wiener process，又稱為標準幾何布朗運動 (standard geometric Brownian motion)。在此模型下利率服從非核心卡方分配¹(non-central chi-square distribution)，其條件機率密度函數為：

$$f(r(s)|r(t)) = ce^{-c(r(s)+\xi)} \left(\frac{r(s)}{\xi} \right)^{d/2} I_d \left(2c\sqrt{\xi r(s)} \right);$$

$$d = \frac{2\kappa\theta}{v^2} - 1,$$

$$c = \frac{2\kappa}{v^2(1 - e^{-\kappa(s-t)})}, \quad \xi = e^{-\kappa(s-t)}r(t)$$

平均數與變異數為：

$$E[r(s)|r(t)] = r(t)e^{-\kappa(s-t)} + \theta(1 - e^{-\kappa(s-t)})$$

$$V[r(s)|r(t)] = r(t)\frac{v^2}{\kappa}(e^{-\kappa(s-t)} - e^{-2\kappa(s-t)}) + \theta\frac{v^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(s-t)})^2$$

在 CIR 利率模型中，因第(6)式為瞬間利率，並非市場上可觀察之利率水準。若需要估計時間 T 到期之零息債券價格或殖利率，

則須再透過利率期間結構模型再進一步推算。根據短率模型與利率期間結構，時間 T 到期之債券於時間 t 之價格 $P(t, T)$ 為：

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds} \quad (7)$$

在 CIR 利率模型下，(7)式可改寫成：

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r(t)B(t, T)} \quad (8)$$

其中

$$A(t, T) = \left(\frac{2\gamma e^{(\kappa+\gamma)(T-t)/2}}{(\kappa+\gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right)^{2\kappa\theta/v^2}$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\kappa+\gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2v^2}$$

假設目前時點為 t ，透過 T 年後到期之債券價格 $P(t, t+T)$ 估計，即可推算當時 T 年期之債券殖利率水準 $YTM_{t,T}$ ：

$$YTM_{t,T} = -\frac{\ln P(t, t+T)}{T} \quad (9)$$

2.5 資產動態變化

有關保單所形成之公司資產價值部份，我們定義該資產主要由兩個項目構成，分別為債券型資產 $B(t)$ 與股票型資產 $S(t)$ 。其各自以股價指數及債券指數為投資標的，若假設兩種資產的隨機過程是根據幾何布朗運動 (Geometric Brownian Motion, GBM) 的假設，亦即資產的報酬率符合“對數常態分配” (Lognormal distribution)。則對於債券型資產 $B(t)$ 與股票型資產 $S(t)$ 之隨機過程可分別表示如下：

$$d \ln S = \left(\mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) dt + \sigma_s dW_s \quad (10)$$

$$d \ln B = \left(\mu_B - \frac{1}{2} \sigma_B^2 \right) dt + \sigma_B dW_B \quad (11)$$

其中

¹ 詳見 Chan, Longstaff and Sanders (1992)、Chen and Scott (1993) 與 Chen, R. R., (1996)。

μ_S 為股票指數之平均報酬

μ_B 為債券指數之平均報酬

σ_S 為股票指數之波動率

σ_B 為債券指數之波動率

W_S 與 W_B 為兩個不同之標準幾何布朗運動

另外，由於企業年訂有保證最低給付兩年定存利率之報酬，因此，在估計債券型資產 $B(t)$ 與股票型資產 $S(t)$ 之餘，仍須同時估計對應之兩年期定存利率水準，在 CIR 利率模型下，須先透過第(6)式短期利率之模擬，才能找出對應之兩年期債券之殖利率。因此，在進行企業年金收益之模擬時，須同時模擬第(6)式、第(10)式與第(11)式，但由於三者之間的變動存乃具有一定程度的相關，故在進行模擬時，須先找出三者的相關係數，再進行債券型資產 $B(t)$ 、股票型資產 $S(t)$ 與兩年期定存利率之模擬。茲將模擬方法簡略說明如下：

令 $V = [d \ln S \quad d \ln B \quad dr]'$ 且假設 $E(VV') = R$ 為三者之相關係數矩陣，則透過 Cholesky 分解法，可將相關係數矩陣分解為 $R = LU = A'A$ ，其中 L 為下三角矩陣， U 為上三角矩陣。模擬時給定 ε 為透過獨立之標準常態變數模擬之 (1×3) 矩陣，且令 $Z = \varepsilon A$ 為具 (1×3) 個相依之標準常態隨機變數之矩陣²，則透過 $dW_t = Z \times \sqrt{dt}$ 則可模擬出具有相關之債券型資產、股票型資產與兩年期定存利率。

3. 數值計算與投保收益評估

在前文之精算分析與資產報酬的動態假設下，本研究透過數值方法模擬台灣企業年金之收益變化與可能之報酬；對於數值計算所需之參數，則採美國市場資料進行估計。其主要原因在於企業年金保單的契約期間長

達 60 至 80 年，因此，必需援引較長期間之歷史資料，方能反應未來報酬之可能分配，礙於台灣貨幣市場與資本市場之歷史較短³，且早年台灣處於經濟快速成長階段，資產報酬與利率皆可能過於高估，而近年之資本報酬與市場利率則又處於相對的低點。考量台灣已邁入開發中國家之行列，未來經濟環境將與過去經濟成長有極大差異，因此，在不失一般性的前提下，本研究以美國之市場資料來估計數值分析所需之參數。

3.1 利率隨機過程與資產報酬模擬

本研究採 CIR 模型進行利率參數之估計，再根據估計值模擬利率的變動過程。前已說明，因 CIR 模型中的利率過程為市場上無法直接觀察之瞬間利率，因此在模型參數估計上大多採用短期利率作為瞬間利率之代理變數。另外，由於利率之均數復歸 (Mean-reverting) 速度相當緩慢 (見 Gibbons and Ramaswamy, 1993)，其循環週期可能長達數年之久，加上企業年金保險保單存續期間可長達 60 至 80 年，因此，本研究以 1920 年 2 月至 2008 年 2 月美國之 90 天期 T-Bills 收益率，做為瞬間利率之代理變數以進行 CIR 利率參數之估計。另外，本研究透過相同期間之美國 S&P 500 總收益指數 (以下簡稱 S&P 500 指數) 與美國 10 年期公債總收益指數，進行股票型資產與債券型資產之平均報酬率與波動率之參數估計。

美國 S&P 500 指數、十年期公債總收益指數與 90 天期 T-Bills 之收益敘述統計如表 1 所示。其中，S&P 500 指數之年平均報酬約為 9.79%，標準差為 18.73%；十年期公債指數則之平均年收益約為 5.24%，標準差為

² 因 $E(\varepsilon'\varepsilon) = I$ ，因此 Z 之相關係數數矩陣

$$\begin{aligned} E(Z'Z) &= E(A'\varepsilon'\varepsilon A) = A'E(\varepsilon'\varepsilon)A \\ &= A'A = \Omega. \end{aligned}$$

³ 根據中央銀行所提供最早的台灣利率資料為 1961 年。而台灣的股票指數資料則從 1971 年開始，但台灣所編制之加權指數並非總報酬指數 (Total return index)。另外，台灣公債指數於 1992 年開始，大華債券公司自行編制，而 2005 年台櫃買賣中心因成立等殖交易系統後，亦開始編制台灣公債指數。

表 1 股價指數與債券指數之歷史報酬率

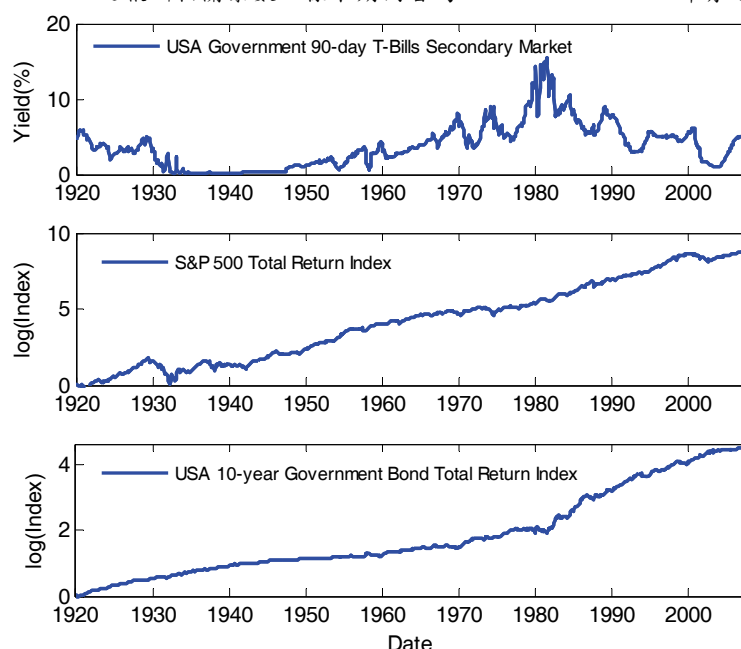
	Total Return Indices		90-day T-Bill Yield
	S&P 500	10-Year Bond	
Mean	.0979	.0524	.0378
Median	.1461	.0370	.0347
Maximum	4.282	1.609	.1552
Minimum	-4.216	-1.137	.0002
Std. Dev.	.1873	.0629	10.1780
Skewness	-.4680	.6945	.9965
Kurtosis	11.199	9.752	4.332
Observations	1057	1057	1057

上表乃估計 10-year 之 Total Return Government Bond Indices、S&P 500 Total Return Index 與美國 90-day T-Bills Yield in Second Market 之報酬率敘述統計，其中 S&P 500 指數與 10 年期美國公債指數皆為年化之平均報酬，而 90 天期 T-Bill 則為以月資料所估計之平均殖利率水準，樣本期間皆為 1920/02~2008/02，計有過去 91 年的歷史資料。

表 2 股價指數、債券指數與短期利率之相關係數估計

	S&P 500	10-Year Bond	T-Bill 90-day
S&P 500	1		
10-Year Bond	.1128	1	
T-Bill 90-day	-.0119	.0502	1

上表乃估計 10-year 之 Total Return Government Bond Indices、S&P 500 Total Return Index 與美國 90-day T-Bills Yield in Second Market 之報酬相關係數。樣本期間皆為 1920/02~2008/02，計有過去 91 年的歷史資料。



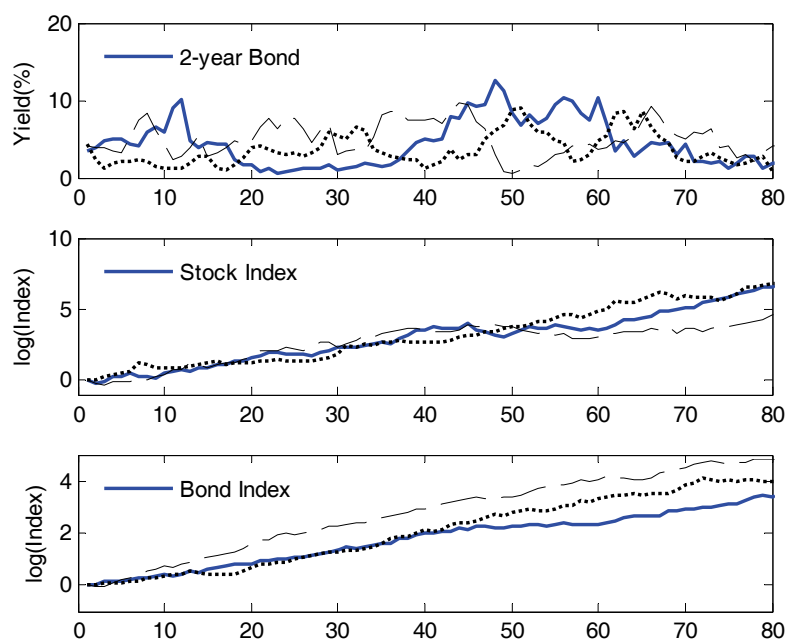
上圖係由 USA 10-year Government Bond Total Return Index 與 S&P 500 Total Return Index 與 USA Government 90-day T-Bills Secondary Market，所繪製之走勢圖，其中 S&P500 指數與 10 年期公債收益指數期初指數皆設為 1，且為了讓圖更易觀察，S&P500 指數與 10 年期公債收益指數皆取自然對數。樣本期間皆為 1920/02~2008/02，計有過去 91 年的歷史資料。

圖 1 美國股票指數、債券收益指數與 90 天期政府公債之走勢圖

表 3 短期利率 CIR 模型之參數估計

回復速度 κ	平均利率水 準 θ	波動參數 ν	樣本平均	樣本數
0.0743	0.0339	0.0670	0.0378	1056

上表為使用 MLE 估計美國 90 天期 T-bill 次級市場之利率參數，樣本期間皆為 1920/02~2008/02，計有過去 91 年的歷史資料。



上圖使用 CIR 利率模型，模擬的兩年期定存利率，其中隨機利率過程為 $dr = \kappa(\theta - r)dt + \nu\sqrt{r}dW$ ，另外透過幾何朗模型模擬股價指數 (Stock Index) 與債券指數 (Bond Index)。其中利率、股價指數與債券指數皆進行三次模擬。另外，為了讓股價指數與債券指數走勢能夠清楚呈現，股價指數與債券指數之座標皆取自然對數之座標。

圖 2 資產報酬與兩年期定存利率模擬

6.29%⁴；而 90 天期 T-Bills 平均收益率則為 3.78%。上述三指數間之相關程度顯示(表 2)：S&P 500 指數與十年期公債總收益指數為弱相關(相關係數 0.11)；S&P 500 指數與 90 天期 T-Bills 兩者報酬之相關性則更低(相關係數僅為 -0.01)。我們以圖 1 呈現三指數之收益走勢，其中，S&P500 指數與 10 年期

公債收益指數期初指數皆設為 1，為了讓圖更易觀察，S&P500 指數與 10 年期公債收益指數皆使用對數座標。由圖 1 之美國 90 天期 T-Bills 收益之走勢圖可以看出在 1940 年附近美國短期利率水準相當之低，在 1940 年平均僅有 0.47%，而在 1980 年代美國短期利率則攀至高點，1981 年 90 天期 T-Bills 平均利率高達 13.97%，由此，也顯示了透過長期的歷史資料才能更準確的掌握長期的利率動態的可能。

對於 CIR 利率參數的各種估計方法，並非本研究之主題。因此，在此僅說明本研究

⁴在楊曉文與張孝旭(2005)在透過台灣市場資料所估計參數，以進行保險公司資產報酬模擬中，其股票指數平均年報酬與標準差分別為 16.45% 與 31.60%，而債券指數之平均年報酬與標準差分別為 8.08% 與 3.67%。

在 CIR 利率參數估計的作法。由於 CIR 模型之利率的隨機過程並非服從常態分配，若使用古典迴歸模型來估計 CIR 利率參數，則迴歸誤差項將會有序列相關之問題。解決此一問題的簡便方法便是使用加權最小平方法 (Weighted Last Squares, WLS) 來進行 CIR 利率參數估計 (Judge, Hill, Giffiths, Luepohl and

Lee, 1992; Chen and Scott, 1993 與 Chen, 1996)。而除了使用 WLS 來估計 CIR 利率參數外，另外一個可行的方法為最大概似估計法 (Maximum Likelihood Estimation, MLE)，MLE 法可以解決利率過程的異質變異且屬於穩健 (robust method) 估計量，因此，MLE

表4 人壽保險業歷年資金運用表

年度	銀行存款		固定收益資產		權益資產	
	金額	比率	金額	比率	金額	比率
1997	350,663,446	61.7%	103,846,702	18.3%	113,984,828	20.1%
1998	387,841,912	59.0%	147,633,764	22.5%	121,840,204	18.5%
1999	401,701,472	48.5%	265,559,585	32.1%	160,891,693	19.4%
2000	354,855,121	37.9%	402,657,388	43.0%	179,051,903	19.1%
2001	341,649,699	29.6%	574,102,944	49.8%	237,557,358	20.6%
2002	270,107,188	18.5%	868,344,754	59.6%	318,956,441	21.9%
2003	180,375,430	10.7%	1,109,457,043	65.8%	397,128,844	23.5%
2004	196,750,942	9.6%	1,464,352,902	71.2%	396,318,183	19.3%
2005	189,966,321	8.4%	1,620,452,449	72.0%	441,677,381	19.6%
2006	306,223,043	11.2%	1,883,583,418	68.8%	549,898,375	20.1%
平均比率		29.5%		50.3%		20.2%

上表乃透過保險發展中心所公佈之「人壽保險業歷年資金運用表」估計報人壽保險業在過去十年間各總不同資產的投資比率，上表中「固定收益資產」包含了政府公債與公司債兩項，而「權益資產」則包含了股票與受益憑證。

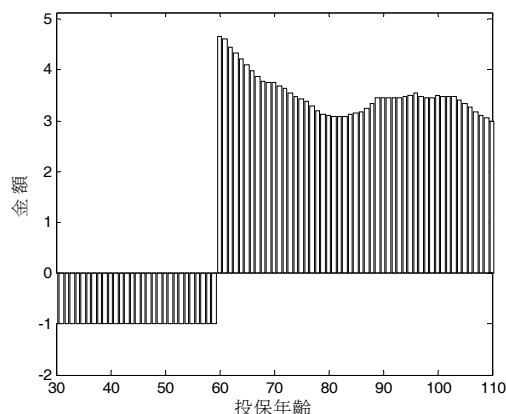
成為廣泛使用的參數估計法⁵。另外，由於 MLE 必須給定參數初始值才能進行求解，因此，若要透過 MLE 估計利率參數，則須先決定適當的參數初始值。為解決參數初始值之設定問題，本研究透過兩階段進行 CIR 參數估計，第一階段使用 WLS 估計參數之初始值，第二階段則將 WLS 所得之參數初始值帶入 MLE 估計出利率參數值⁶，表 3 即為透過美國 3 個月期 T-bills 利率做為瞬間利率代理變數，所估計之利率參數值，其中所估計之平均利率水準 3.39% 相當接近於歷史平均值 3.78%，而利率復歸速度 (κ) 為 0.0743，短期

利率之「半週期」(half-life) 約為 $\ln(1/2)/\ln(1-0.0743)=8.98$ 年。

根據歷史參數所模擬之債券總收益指數、股票總收益指數與二年期債券殖利率之走勢如圖 2，圖中每一資產類別分別進行三次模擬，其中 2-year Bond 為模擬未來兩年期債券殖利率走勢，以作為兩年期定存利率之代理變數，而 Stock Index 與 Bond Index 則分別為模擬總收益指數之走勢。值得注意的是，由於模擬資產報酬的期間長達 80 年，因此為了整各模擬期間之資產報酬能清楚呈現，故 Stock Index 與 Bond Index 兩者座標皆為對數化座標。

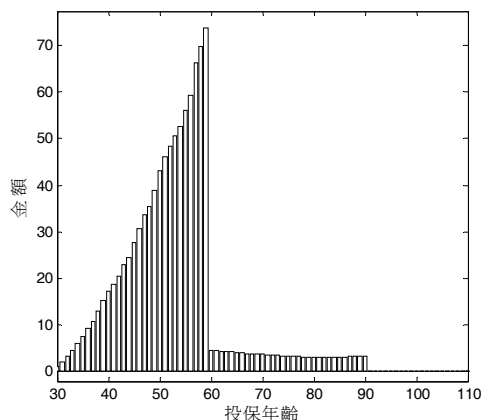
⁵ 見 Lo (2005)、Chen and Scott (1993) 與 Chen (1996)

⁶ 詳見附錄。



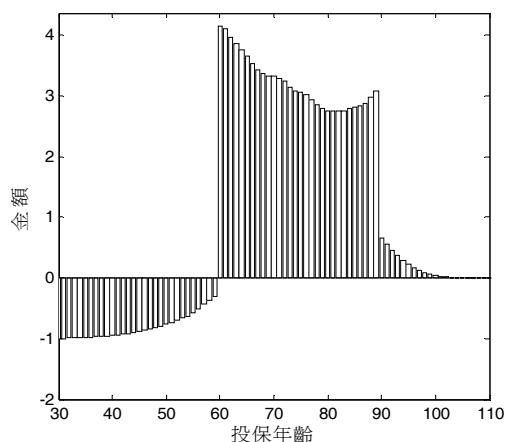
由利率模擬與資產報酬率評估結果計算企業年金保單收益。若被保人存活至 110 歲（生命表統計之最高存活年齡為 110 歲），該保單自投保日起至契約終止時之現金流量。

圖 3 被保人存活下之現金流量



由利率與資產報酬率之模擬評估，被保險人於 30 至 59 歲期間逐期繳納定額保險費，自 60 歲起依據市場利率與資產報酬的變化領取金額不等之年金。相對而言，若被保險人於契約有效期間死亡，保單受益人將可領取如圖之理賠金額。

圖 4 被保人死亡之現金流量



由利率與資產報酬率之模擬評估，加上生命表之存活與死亡機率，考量投保者於契約期間面對兩種情境（被保險人於當期生存或死亡）之可能現金流量，透過生命表的統計資料，我們可以據此推估企業年金保單於契約期間之各期現金流量期望值。

圖 5 企業年金保單期望現金流量

3.2 保單收益率評估結果

在保單收益率的模擬過程裡，需先對保險公司的資產配置及資產投資報酬分配至保單之收益參與率進行假設。根據保險事業發展中心所公佈之1997至2007年「人壽保險業歷年資金運用表」，若將人壽保險業之主要投資之資產區分為「銀行存款」、「權益資產」與「固定收益資產」三項，過去11年間此三種資產投資之比率約為：銀行存款30%、固定收益資產50%及權益資產20%；本研究即以此資訊作為保險公司資產投資比率的假設，同時將投資績效盈餘分配比率(參與率)定為70%。

針對企業年金保單收益率之數值計算，我們採下列精算假設作為模擬基礎；首先，投保之企業員工為30歲男性，投保期間30年（即60歲退休），保證給付期間20年。換言之，投保人從30歲開始逐期繳納定額保險費（假設年繳保費1元），若被保險人在60歲（退休金開始給付日）前死亡，則停止保費支付，同時保險公司需將保費累積至當時之保單價值準備金返還受益人；相反地，投保人需繳費至59歲，並從60歲開始終身領取年金，而且，當被保險人於80歲前死亡，保險公司仍需定期支付年金于保單受益人直到保證期間（被保險人60至79歲）終了為止。

根據上述精算假設，我們利用前一節的利率模擬與資產報酬率評估結果代入計算企業年金保單收益。若被保人存活至110歲（生命表統計之最高存活年齡為110歲），該保單自投保日起至契約終止時之現金流量如圖3，其中勞工(被保險人)於30至59歲期間逐期繳納定額保險費，自60歲起依據市場利率與資產報酬的變化領取金額不等之年金。相對而言，若被保險人於契約有效期間死亡，保單受益人將可領取如圖4所示之理賠金額；當被保險人在60歲（退休金開始給付日）前死亡，保險公司需將保費累積至當時之保單價值準備金返還受益人，相反地，保險公司則定期支付年金直到保證期間（被保險人60至79歲）終了為止。

圖3、圖4分表投保者於契約期間面對兩種情境（被保險人於當期生存或死亡）之可能現金流量，透過生命表的統計資料，我們可以據此推估企業年金保單於契約期間之各期現金流量期望值(圖5)，進而計算保單內部報酬率(該報酬率等於使預估期望現金流量現值總和為零之折現率)，此內部報酬率即為該保單之投保收益率。

透過上述估算步驟，以蒙地卡羅重複模擬5,000次，得到保單收益率之次數統計如表5所示，圖6顯示該次數統計直方圖分佈，由圖6可清楚的看出保證收益率呈現右偏分配，這是因為在企業年金條例中保證至少給付兩年期定存利率所致，即便保險公司資產組合報酬低於兩年期定存利率，保險公司仍需給付兩年期定存利率，而當保險公司資產組合報酬高於兩年期定存利率，則被保人將享有高於兩年期定存利率之收益率。整體而言，保單收益率之平均值約達6.963%。

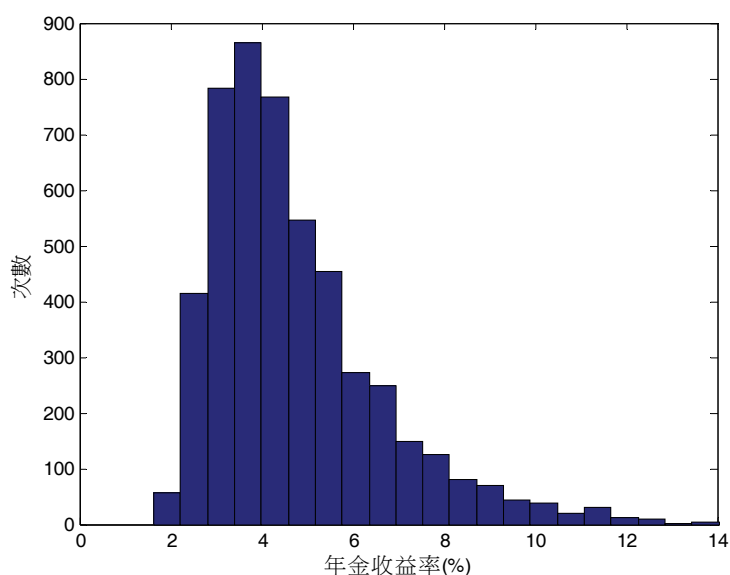
上述模擬之保單收益率高低，主要受到資產報酬參數給定的影響。就目前全球利率水準來看，明顯低於模擬所給定之平均值3.78%，但由美國90天期T-bills歷史利率觀察(圖1)，在1940年間美國短期利率也曾低至2%以下，而在1980年短期利率卻又高到10%以上，因此，若僅以近幾年之利率水準作為模擬參數，則所模擬之利率水準其代表性可能會有所降低。

保單收益率反應著投保者所繳保費之期望報酬率；相對而言，卻是保險公司發行該保單每一元保費收入之資金取得成本。由圖6得知，在年金保單收益呈現右偏的情況下，保險公司將面臨高度的風險，原因是保險公司資產報酬之左尾分配遠高於保單收益率，因此保險公司面臨虧損機率大為增加。或許，這也說明現行企業年金保險市場的開放，並未吸引保險公司踴躍投入的現象。

表 6 年金保單收益率統計表

保單收益率區間			統計次數
	保單收益率 <	2.50%	191
2.50%	≤ 保單收益率 <	3.50%	1,208
3.50%	≤ 保單收益率 <	4.50%	1,385
4.50%	≤ 保單收益率 <	5.50%	913
5.50%	≤ 保單收益率 <	6.50%	530
6.50%	≤ 保單收益率 <	7.50%	326
7.50%	≤ 保單收益率 <	8.50%	183
8.50%	≤ 保單收益率 <	9.50%	116
9.50%	≤ 保單收益率 <	10.50%	62
10.50%	≤ 保單收益率 <	11.50%	42
11.50%	≤ 保單收益率 <	12.50%	26
12.50%	≤ 保單收益率 <	13.50%	6
13.50%	≤ 保單收益率 <	14.50%	5
14.50%	≤ 保單收益率		7

上表為根據現行企業年金條列規範，所模擬之保單收益統計。模擬參數為：股票指數年報酬率為報酬約為 9.79%，標準差則為 18.73%。債券收益指數年平均報酬率為 5.24%，標準差約為 6.29%。平均短期利率為 3.78%，利率之均數復歸速度為 0.0743。保險公司資產配置則假設在銀行定存存款、債券資產與股票資產分別為 30%、50%與 20%。



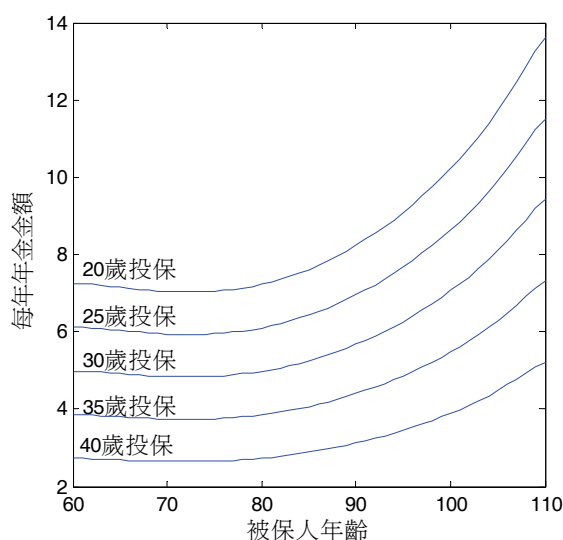
年金收益率即為保單內部報酬率(IRR)，也就是使保單預估現金流量現值總和為零之折現率，其中 IRR 之求解採用十分逼近法至 $|NPV| < 10^{-6}$ 水準。

圖 6 保單收益率之模擬

4. 投保收益之敏感度分析

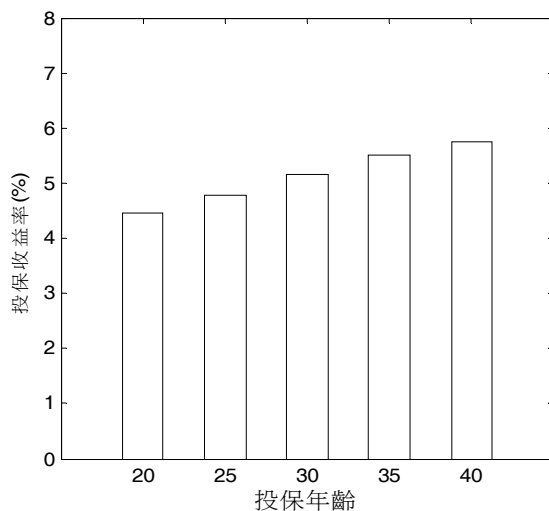
本研究以隨機模擬的方式來評估企業年金投保收益，所以隨著隨機模型參數之調整或精算條件的改變，其計算結果也將不同。因模型參數部份係根據市場情境設定，我們暫且不作進一步探討。本節將就精算假設部份，分析不同契約狀況下其投保收益之影響：第一種狀況為相同的給付條件(年金於

被保險人 60 歲開始給付，保證給付期間 20 年)下，不同年齡的勞工參加保險計劃，第二種狀況為勞工投保期間一致(30 歲投保，60 歲開始給付年金)，但契約約定之保證給付期間不一，第三種狀況則考量一樣的投保、給付期間(30 歲投保，60 歲開始給付年金，保證給付期間 20 年)，但保單的保證收益率不同。



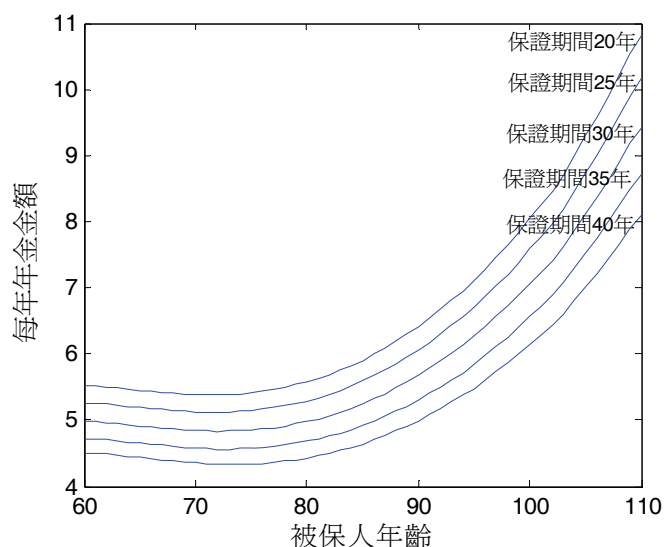
圖中假設保證給付 20 年且於 60 歲開始給付下，分別假設被保險人之投保年齡為 20、25、30、35、40 歲，模擬 60 歲以後之每年可領取年金之金額。如圖所示愈早加入保險計劃者其年金收益金額愈高。

圖 7 不同年齡投保年金金額變化



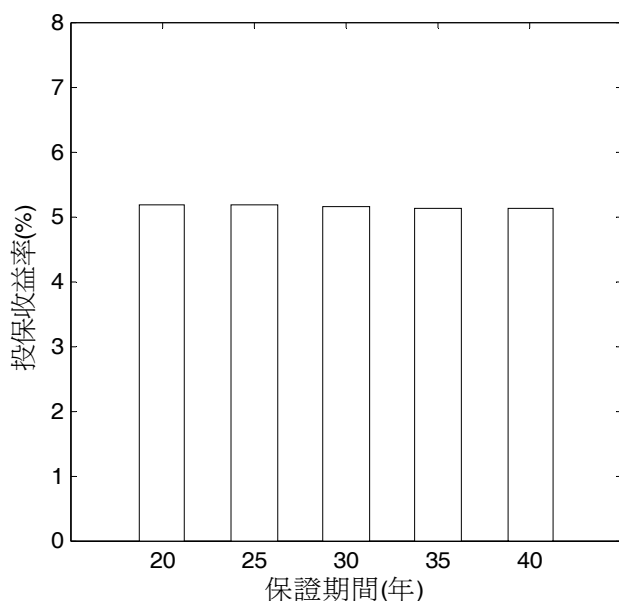
圖中假設保證給付 20 年且於 60 歲開始給付下，分別假設被保險人之投保年齡為 20、25、30、35、40 歲，模擬估計投保收益率。

圖 8 不同年齡投保年金收益率比較



本圖假設勞工於 30 歲進行投保且於 60 歲開始給付下，模擬保證給付期間分別為 20~40 年期之年金收益金額。結果顯示，隨著保證期間增長，保險公司支付年金機率亦提高；相對而言，每期年金精算金額將降低。

圖 9 不同保證給付期間年金金額變化



本圖假設勞工於 30 歲進行投保且於 60 歲開始給付下，模擬在不同保證期間下之保單收益率，由保單收益率主要係反應契約期間的宣告利率，因此，雖然保證給付期間不同，但對於投保收益率的影響亦不顯著。

圖 10 不同保證給付期間年金收益率比較

首先，針對第一種狀況，我們分別假設被保險人之投保年齡為 20、25、30、35、40 歲，進行模擬。結果顯示，隨著投保年齡的增加，縮短了繳費期間，可領取之年金當然

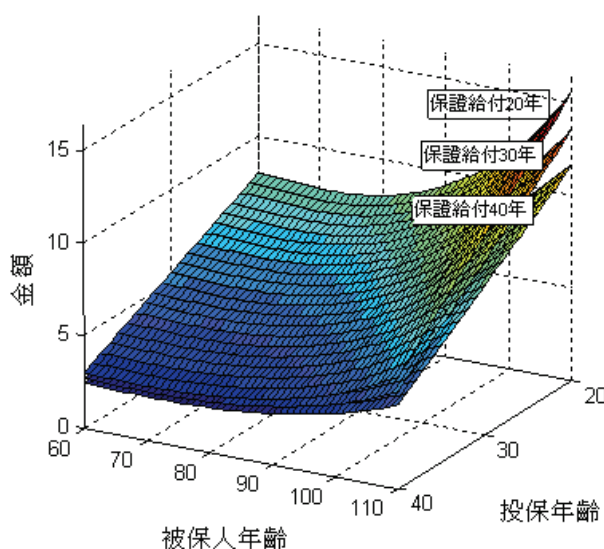
隨之減少(圖 7)。但在投保收益率方面，因年金金額之計算係以各期宣告利率為精算基礎，保單收益率主要反應著契約期間的宣告利率，所以投保年齡不同並不會造成平均

投保收益率的重大改變。

其次，本研究模擬保證給付期間分別為20、25、30、35、40年期之年金收益金額與收益率。結果顯示，隨著保證期間增長，保險公司支付年金機率亦提高；相對而言，每年年金精算金額將降低(圖9)。若依保單收益率觀察，前已提及，保單收益率主要係反應契約期間的宣告利率，同樣地，保證給付期間不同，對於投保收益率的影響亦不顯著(圖10)。

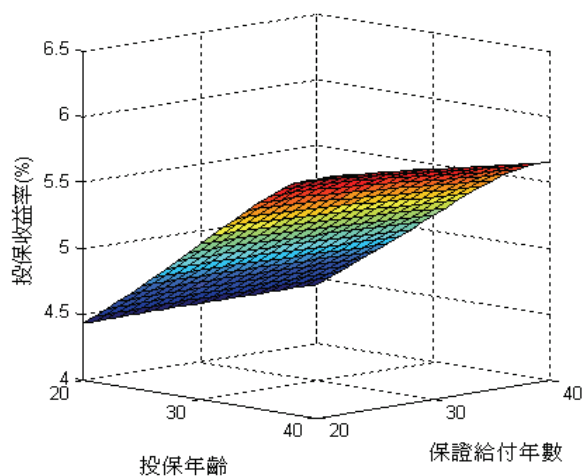
綜合上述分析，我們透過圖11來觀察

投保年齡、保證給付期間兩因素對年金收益金額的影響情形。顯而易見，及早加入企業年金投保計劃，可為勞工退休生活帶來更有保障的經濟條件。而保證期間之長短，對於投保者而言則是利弊各見；較長的保證期間，雖可免除投保人擔心早期死亡而損失本金的疑慮，但卻降低了存活期間可領取的年金金額。至於投保收益率部份，投保年齡與保證給付期間對年金收益率的影響皆不顯著(圖12)。



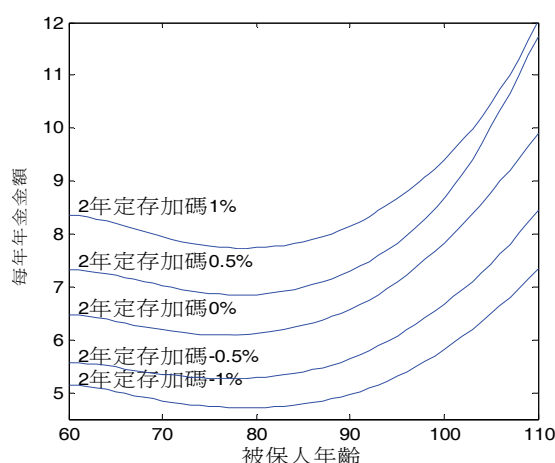
此圖為透過模擬分析在不同投保年齡與不同保證給付期間下，每年可獲得之年金金額。

圖11 不同保證給付期間與投保年齡之年金金額變化



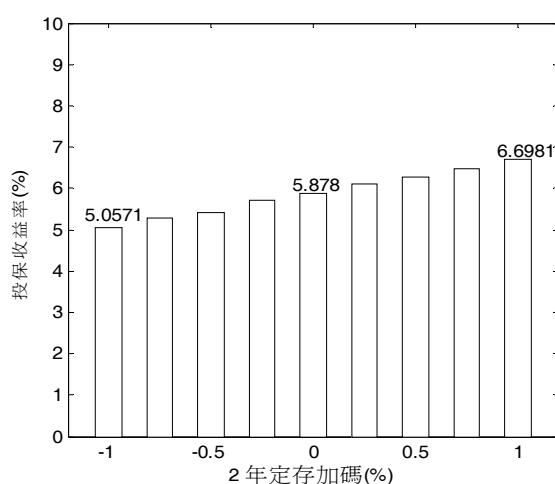
此圖為透過模擬分析在不同投保年齡與不同保證給付期間下，每年可獲得之年金收益率。

圖12 不同保證給付期間與投保年齡之年金收益率比較



此圖乃分析若企業年金能夠修改為可將保證收益率改為對兩年期定存利率加減碼，隨者保證收益率的減碼，每年年金金額隨之下降，反之則上升。

圖 13 不同保證收益率年金金額變化



隨著保證收益率的減碼，該平均投保收益率亦隨之降低，反之隨著保證收益率的加碼。

圖 14 不同保證收益率之平均投保收益率比較

表 6 放寬保證收益率之加減碼之分析

	-1.00%	-0.50%	0%	0.50%	1.00%
Panel A. 平均年金金額與投保收益率水準					
平均年金金額	5.057	5.413	5.878	6.268	6.698
投保收益率(%)	5.304	5.972	6.963	7.849	8.652
Panel B. 平均年金金額與投保收益率之變化幅度					
平均年金金額	-0.821	-0.465	0.000	0.390	0.820
投保收益率(%)	-1.659	-0.991	0.000	0.886	1.689

此表為乃分析，若開放保險業者可在一定範圍內對兩年期定存款利率加減碼，則在不同的加減碼下，平均年金金額與投保收益率之水準與期變化幅度，Panel A 為不同加減碼水準下的平均年金金額與投保收益率水準。Panel B 為平均年金金額與投保收益率之變化。

最後，我們分析保證收益率的不同，對年金收益金額與收益率之影響。現行法令規範，企業年金帳戶基金保證收益率為契約期間各期之兩年期定期存款利率，若開放保險業者在一定範圍內可對兩年期定期存款利率加減碼，則可降低保險公司之風險，增加保險公司承作此一業務之意願，圖 13 即為在不同加減碼下，勞工每年可能獲得之年金金額。隨著保證收益率的減碼利率增加，每年年金金額下降幅度減少，即保證收益率減碼造成每年年金金額下降呈現非線性，此乃因為企業年金之收益還另外含有保險公司投資組合之報酬之成份，當保證收益率降低時，保險公司以其投資組合報酬之收益率作為保單之收益率的機率上升，因此，導致每年年金金額下降為非線性。

圖 14 則為不同的保證收益率加減碼下年金之收益率，隨著保證收益率的減碼，該平均投保收益率隨之降低，當放寬保證收益率為兩年期定期存款利率減 0.5% 時，勞工最終領取之投保收益率為 6.476%，與完全不加碼來比較，投保收益率下跌 0.358%，再放寬保證收益率為兩年期定期存款利率減 1.0%，勞工最終領取之投保收益率為 6.099%，與完全不加碼來比較，投保收益率下跌 0.735%。表 6 即彙整了在不同保證收益率之加減碼下，平均年金及投保收益率水準及變化幅度。

5. 結論與建議

在相關的法令規範下，政府鼓勵保險公司推出企業年金保險商品，為退休勞工提供另一種退休計劃。規範中的企業年金保單，必需符合給付期間與投保收益率的雙重保證。給付期間保證的年金保險，在免除勞工長壽風險外亦兼顧過早死亡所造成的投保收益虧損；投保收益率保證，更是確保年金所得水準的重要依據。然而，保證收益率過低，降低企業年金計劃參與者之退休福利與保障，相反地，卻又使得壽險公司獲利不足，降低其投入退休金保險市場意願。

本文透過利率期間結構與資產報酬的動態變化模擬，估計保險公司所推出之企業年金保單於契約期間之保單價值變化，及核算年金給付開始後，各期年金期望收益金額。透過上述之現金流量模擬我們發現，現行的保證收益率限制，將使得企業年金保單的發行成本明顯高於目前固定預定利率保單。換言之，企業年金保險的規劃並未帶來明顯商機，以致無法獲得保險公司的熱烈響應。這樣的結果也說明現在市場多數保險公司遲未推出企業年金保單的現象。為落實政府對退休員工照顧的美意，也兼顧保險公司獲利與財務營運安全性，我們認為保證收益率水準的訂定仍需通盤檢討，以營造一個活潑、效率的退休金市場。

6. 參考文獻

1. 楊曉文、張孝旭，(2005)，「勞退新制下變額年金保險之收益保證風險評估與資本適足性研究」，風險管理學報，第7卷第3期，民94年，301-329頁。
2. Bauer, D., Kiesel, R., Kling, A. and Ruß, J., (2006), "Risk-neutral valuation of participating life insurance contracts," *Insurance: Mathematics and Economics*, 39, pp. 171-183.
3. Bacinello, A.R., (2001). "Fair pricing of life insurance participating contracts with a minimum interest rate guaranteed," *Astin Bull.* 31, 275-297.
4. Bacinello, A.R., (2003), "Pricing guaranteed life insurance participating policies with annual premiums and surrender option," *North American Actuarial Journal*, pp. 1-17.
5. Brennan, M.J. and Schwartz, E.S., (1976), "The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee," *Journal of Financial Economics*, 3, pp.195-213.
6. Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A.

- and Sanders, A.B., (1992), "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate," *The Journal of Finance*, 47, pp.1209-1227.
- 7.Chen, R. R., (1996), *Understanding and Managing Interest Rate Risks*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- 8.Chen, R.R. and Scott, L., (1993), "Maximum Likelihood Estimation for A Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Fixed Income*, 3, pp.14-30.
- 9.Cox, J.C., Ingersoll, J.E. and Ross, S.A., (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53, pp.385-407.
- 10.Gibbons, M.R. and Ramaswamy, K., (1993), "A Test of the Cox, Ingersoll, and Ross Model of the Term Structure," *The Review of Financial Studies*, 6, pp.619-658.
- 11.Grosen, A. and Jørgensen, P.L., (2000), "Fair valuation of life insurance liabilities: the impact of interest rate guarantees, surrender options, and bonus policies," *Insurance: Mathematics and Economics*, 26, pp. 37-57.
- 12.Grosen, A. and Jørgensen, P.L., (2002), "Life insurance liabilities at market value: an analysis of investment risk, bonus policy and regulatory intervention rules in a barrier option framework," *Journal of Risk Insurance*, 69, 63-91.
- 13.Guill'en, M., Jørgensen, P.L. and Perch-Nielsen, J., (2006), "Return smoothing mechanism in life and pension insurance: path-dependent contingent claims," *Insurance: Mathematics and Economics*, 38, pp.229-252.
- 14.Haberman, S., Ballotta, L. and Wang, N., (2003), "Modelling and valuation of guarantees in with-profit and unitised with profit life insurance contracts," Actuarial Research Paper No. 146, City University, London (under review).
- 15.Judge, G.G., Hill, R.C., Griffiths, W.E., Lutkepohl, H., and Lee, T., (1982), *Introduction to the theory and practice of econometrics*, John Wiley & Sons, New York.
- 16.Lo, Ingrid (2005), "An Evaluation of MLE in a Model of the Nonlinear Continuous-Time Short-Term Interest Rate," Working Papers 05-45, Bank of Canada.
- 17.Tanskanen, A.J. and Lukkarinen, J., (2003), "Fair valuation of path-dependent participating life insurance contracts," *Insurance: Mathematics and Economics*, 33, 595-609.
- 18.Vasicek, O., (1977), "An Equilibrium Characterization of The Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5, pp.177-188.

附錄 CIR 模型之利率參數估計

由於 CIR 模型中之變異數具時間相依(time-dependent)，若使用迴歸模型來估計相關參數，其迴歸誤差項(error term)之間並非獨立，在此情形下若直接使用最小平方法(ordinal least squares, OLS)估計 CIR 參數，將無法達到統計上之有效性(efficiency)，因此需改以加權最小平方法(weighted least square; WLS)、最大概似法(Maximum likelihood estimation; MLE)或動差法(Generalized Method of Moments, GMM)等進行參數估計。

上述三種估計法各有其優點與缺點，如 Chen (1996)在討論利率參數估計時指出，雖然 MLE 或 GMM 皆為穩健(robust method)之估計方法，但 MLE 法最大的問題在於參數初始值的設定，若給定初始值不一所得結果也將截然不同；而 GMM 法的主要困難點則在動差的選取，不同動差次數亦會造成參數估計具有相當大的差異。本研究對利率參數估計則採折衷方法，即先透過 WLS 估計參數初始值，在由 MLE 估計出最後參數值。首先說明 WLS 估計 CIR 之利率參數初始值之步驟如下：

1. 首先透過最小平方法估計以下迴歸式之係數 (β_0 、 β_1) 及誤差項 (u_t)：

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + u_t \quad (\text{附-1})$$

2. 在 CIR 模型下，上式誤差項(error term)之變異數 $E[u_t^2]$ 為：

$$E[u_t^2] = \theta \frac{v^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(s-t)})^2 + \frac{v^2}{\kappa} (e^{-\kappa(s-t)} - e^{-2\kappa(s-t)}) \cdot r(t) \quad (\text{附-2})$$

其中 κ 、 θ 與 v 為 CIR 模型之利率參數，其意義如前文所述。

3. 針對上述誤差項 (u_t)，我們再建構第二個迴歸式：

$$u_t^2 = \alpha_1 + \alpha_2 r_{t-1} + w_t \quad (\text{附-3})$$

由 $E[u_t^2]$ 等式可獲得： $\alpha_1 = \theta \frac{v^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(s-t)})^2$ ， $\alpha_2 = \frac{v^2}{\kappa} (e^{-\kappa(s-t)} - e^{-2\kappa(s-t)})$ 。

4. 由第一個迴歸式之係數估計值 ($\hat{\beta}_0$ 與 $\hat{\beta}_1$) 與(6)式，解出 κ 與 θ ：

$$\kappa = -\ln(\hat{\beta}_1)/(s-t) \quad (\text{附-4})$$

$$\theta = \hat{\beta}_0 / (1 - \hat{\beta}_1) \quad (\text{附-5})$$

5. 透過第二個迴歸式之係數估計結果 ($\hat{\alpha}_1$ 與 $\hat{\alpha}_2$)，解出 v ：

$$\hat{v} = \frac{1}{(1 - \hat{\beta}_1^2)} \sqrt{\hat{\alpha}_1 2\kappa / \theta} \quad \text{或} \quad \hat{v} = \sqrt{\frac{\hat{\alpha}_2 \kappa}{\hat{\beta}_1 (1 - \hat{\beta}_1)}} \quad (\text{附-6})$$

在獲得參數初始值後，即可將初始利率參數帶入 MLE 模型，估計出最後利率參數值，MLE 估計的方法如下。首先考慮前文第(6)式之隨機過程：

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \nu\sqrt{r}dW \quad (\text{附-7})$$

其中 κ 為均數復歸的速度， θ 是利率平均水準， ν 為利率波動之調整係數。且 r_0 、 κ 、 θ 、 ν 皆為正值之常數，並滿足 $2\kappa\theta > \nu^2$ 。在此模型下利率服從非核心卡方分配(non-central chi-square distribution)，其條件機率密度函數為：

$$f(r(s) | r(t)) = ce^{-c(r(s)+\xi)} \left(\frac{r(s)}{\xi} \right)^{d/2} I_d \left(2c\sqrt{\xi r(s)} \right) \quad (\text{附-8})$$

$$d = \frac{2\kappa\theta}{\nu^2} - 1, \quad c = \frac{2\kappa}{\nu^2(1 - e^{-\kappa(s-t)})}, \quad \xi = e^{-\kappa(s-t)}r(t)$$

在進行最大概似法估計 CIR 模型參數前，須先找出 CIR 利率模型之聯合機率分配，其聯合機率分配如下：

$$f(r_t, r_{t+1}, \dots, r_T) = [f(r_T | r_{T-1}) \cdots f(r_{t+1} | r_t) \cdot f(r_t)] \quad (\text{附-9})$$

此一過程為一個 Markov 過程，將(附-2)取對數

$$\ln f(r_t, r_{t+1}, \dots, r_T) = \ln g(r_t) + \sum_{t=2}^T \ln f(r_t | r_{t-1}) \quad (\text{附-10})$$

其中 $g(r_t)$ 為 r_t 之非條件機率密度分配，且服從 gamma 分配：

$$\ln g(r_t) = \frac{2\kappa\theta}{\nu^2} \ln \left(\frac{2\kappa}{\nu^2} \right) - \ln \Gamma \left(2\kappa\theta / \nu^2 \right) + q \ln r_t - \frac{2\kappa}{\nu^2} r_t \quad (\text{附-11})$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 為 gamma 函數， $q = 2\kappa\theta / \nu^2 - 1$ 。由(附-9)可導出 CIR 模型之概似函數(log-likelihood function)：

$$L(r_t, r_{t+1}, \dots, r_T; \kappa, \theta, \nu) = \ln g(r_t) + \sum_{t=2}^T \ln f(r_t | r_{t-1}) \quad (\text{附-12})$$

令 Λ 為所有未知之參數，則最大概似估計法所估計之參數值為：

$$\hat{\Lambda} = \underset{\Lambda}{\text{ArgMax}} L(r_t, r_{t+1}, \dots, r_T; \Lambda) = \underset{\Lambda}{\text{ArgMax}} \left(\ln g(r_t) + \sum_{t=2}^T \ln f(r_t | r_{t-1}) \right) \quad (\text{附-13})$$