

以光滑粒子流體動力法模擬探討水波動態演進

Simulations on the Dynamic Evolutions of Water Free Surfaces by Using Smoothed Particle Hydrodynamics

許掙強

Cheng-Chiang Hsu

空軍航空技術學院飛機工程系

Department of Aircraft Engineering, Airforce Institute of Technology

摘要

本文以光滑粒子流體動力法模擬探討不同情形下水波之生成及演進，詳細的固定及移動固體邊界數值處理方式被提出。水壩崩潰、重力擠壓作用、動板推擠、及艙體搖晃等作用下，詳細之水面波動態變化均被詳細模擬。波浪沖擊斜坡產生波浪翻湧之現象亦被模擬出。發現區域重力擠壓作用於重力施加兩側會個別產生一個等大小以等速往兩邊運動之水波；動板擠壓會提升水位，隨後產生一個往擠壓方向行進的湧波；水平晃蕩的非全滿艙體，在晃蕩過程中，壁面擠壓流體為水面波產生之主要機制，不同行進方向水面波互相衝擊造成水面震盪。

關鍵字：光滑粒子流體動力法、水面波、重力波、衝擊。

Abstract

Smoothed particle hydrodynamics was used to simulate the evolutions of free surfaces of water at various conditions. Especially, numerical techniques for treating the fixed and moving solid boundaries were carefully studied. The evolutions of Dam-break, wave-generation under gravity effect, wave generated by pushed-plate, sloshing waves impacting were successfully simulated. The local unbalance of gravity force on water surface causes the generation of propagating gravity waves. The squeezing effects of moving plate on water increasing the height of water near the plate and then a propagating gravity wave is generated. Sloshing in rectangular tank is controlled by the mechanism of waves introduced by moving plate.

Keywords：smoothed particle hydrodynamics, free surface, gravity wave, sloshing

一、前言

水波與人類的關係是極為密切的。處於平衡狀態的流體，當某部份受到擾動時，平衡變被破壞，在重力、彈性力、表面張力...等恢復力的作用，使得擾動在流體傳波，形成一波動現象。常見的水波擾動有深水

波、淺水波、界面波、Stoke 波及孤立波...等。

近年來由於地球暖化，氣候及環境的變化異常，而伴隨著風暴與地震產生的巨浪往往是造成災害的重要來源，因此了解水波特性及水波與岸面的交互作用，有其積極的意義。在近岸波浪碎裂問題一直是海岸工程的研究熱點，又由於波浪碎裂為一個高度非線

性問題。因此研究有其局限性。在傳統網格數值模擬方式上，由於網格尺度的限制，使得複雜波浪破碎之自由面模擬顯得繁瑣及精度上有其限制。

近年來，由於計算機硬體技術及數值軟體演算法的迅速發展，數值模擬技術已成為科學及工程研究之重要工具。對於波浪演變等具有大變形、運動物質交界面、變形邊界和自由表面的問題，以傳統網格數值方式處理這類問題是有其困擾的。無網格法捨棄網格結構，利用散佈在問題域及邊界上的節點求解問題，可有效處理波浪模擬等，所面臨之大變形、高度非均勻性...等問題[1,2]。光滑粒子動力學方法 (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) 最初是為解決天體物理中涉及物體質團在無邊界三維空間運動而提出，已成功模擬多體爆炸，雲團碰撞等超大尺度問題[3]，是一種無網格拉格朗日粒子法。Monaghan[4-9]將其推廣應用於連續力學的相關領域。

SPH 在計算流體力學應用是多方面的，有震波捕捉方法[10]、Kelvin-Helmholtz 不穩定波模擬[11]、...。在水波自由面的運動有 Monaghan 及 Kos[12]之海浪衝擊岸面之模擬探討；Monaghan 等[13]之斜坡方塊衝擊水面問題研究；Gai 等[14]的水槽晃蕩模擬研究；Zheng 等[15]的水波衝擊斜岸模擬探討。

本文將以 SPH 方式模擬探討水波之形成及動態演進，並將針對 SPH 產生數值邊界作一詳盡陳述。

二、數值模擬方式

2.1 控制方程式

根據水波動時之特性，做下列數點之假設：

(1) 本文考慮之主要效應為重力波，因重力波的特徵時間遠大於黏滯效應影響之毛細波的特徵時間，故可忽略黏滯性。

(2) 密度 ρ 為常數，流體是不可壓縮的。

(3) 質量力僅考慮重力。

故控制方程為：

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V} \quad (1)$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \vec{g} \quad (2)$$

$$P = P(\rho) \quad (3)$$

其中 $\rho, \vec{V}, P$ 為水的密度、速度和壓力。

狀態方程採用 Monaghan[7] 所採用之型式：

$$P = B \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (5)$$

其中 $\gamma = 7$ ，由上式所決定出之音速為

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \approx \sqrt{\frac{\gamma B}{\rho_0}}$$

為符合不可壓縮流之特性，故需使為使流場馬赫數小於 0.1，因此當流場最大特徵速度為 v 時，取

$$a = 10v$$

故

$$B = \frac{100v^2 \rho_0}{\gamma}$$

本文對水深為 h 水波其 v 取為

$$v = \sqrt{2gh}$$

2.2 SPH 數值方法

2.2.1 基本概念

在 SPH 中任意粒子 i 的函數值可近似為

$$\langle f(\vec{r}_i) \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} f(\vec{r}_j) w_{ij} \quad (6)$$

式中 i, j 表粒子編碼， $\vec{r}_i$ 表粒子 i 之位置向量， n 為粒子 i 緊支域內的粒子總數， j 為緊支域中粒子， m_j 、 ρ_j 表粒子 j 的質量與密度 $w_{ij} = w(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h)$ 為核函數， h 為核函數影響域之光滑長度。因為 w 需滿足緊支性 (compactness condition)，所以 $w(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h) = 0$ ，當 $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| > \lambda h$ ， λ 為常數，和選取之核函數有關。本文之計算採用 3 次樣條核函數，形式如下：

$$w_{ij}(s, h) = \alpha_d \begin{cases} 2/3 - s^2 + 1/2s^3 & 0 \leq s \leq 1 \\ 1/6(2-s)^3 & 1 \leq s < 2 \\ 0 & s \geq 2 \end{cases} \quad (7)$$

其中 $s = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| / h$ ， α_d 於一維、二維、三維分別為 $\alpha_d = 1/h, 15/(7\pi h^2), 3/(2\pi h^3)$ ，因此 $\lambda = 2$ 。

因此由(6)式可得

$$\langle \nabla f_i \rangle = \sum_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{\rho_j} \right) f(\vec{r}_j) \nabla_i w_{ij} \quad (8)$$

$$\text{其中 } \nabla_i w_{ij} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}}$$

2.2.2 控制方程之SPH數值型式

將控制方程式離散化為SPH計算形式：

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j=1}^n m_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \nabla_i w_{ij} \quad (9)$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i w_{ij} - \vec{g} \quad (10)$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (11)$$

其中 Π_{ij} 為Monaghan型的人工黏度，它不僅

可將動能轉為熱能，可提供沖擊波面不可少之耗散，更可防止粒子非物理性的穿透[6,16]，其型式如下：

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha c_{ij} \phi_{ij} + \beta \phi_{ij}^2}{\rho_{ij}} & \vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

其中

$$\phi_{ij} = \frac{h_{ij} \vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^2 + \varphi^2};$$

$$\overline{c_{ij}} = \frac{1}{2}(c_i + c_j);$$

$$\overline{\rho_{ij}} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j);$$

$$h_{ij} = \frac{1}{2}(h_i + h_j);$$

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j;$$

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j;$$

$$\varphi = 0.1h_{ij}$$

藉由數值實驗，本文取 $\alpha = 0.01, \beta = 0$ 。

2.2.3 固體邊界之處理

為維繫粒子在固體邊界滿足不穿透條件，在固體邊界上分佈等間隔之邊界粒子，當流體粒子靠近固體邊界時，固體邊界粒子將會對粒子中施予一個Lennard-Jones形式之懲罰力[7,16]

$$\vec{f}(\vec{r}) = D \left(\left(\frac{r}{r_o} \right)^{p_1} - \left(\frac{r}{r_o} \right)^{p_2} \right) \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (r \leq r_o)$$

當 $r > r_o$ 時則取 $\vec{f}(\vec{r}) = 0$

其中 r_o 唯一固定值，本文取為固體粒子之間隔； $\vec{r}$ 為由固體粒子中心指向流體粒子中心之位置向量； $r = |\vec{r}|$ ；在本文常數 $p_1 = 4, p_2 = 2$ ； $D \approx v^2$ ， v 為流體最大特徵速度。

2.2.4 位置向量之積分

在時間積分上本文採用預測校正法(predictor-corrector)，此法在時間上具有二階準確度。

三、結果與討論

本文應用光滑粒子流體動力法模擬探討水在重力作用下，水波的生成與移動固體邊界對水波生成與演進的影響。探討的問題有：1.水壩崩潰演進問題；2.高度分佈不等之水面，其重力波之產生與演變；3.移動隔板如何產生水波及該水波在斜坡之行進情形；4.矩形艙體因左、右搖晃所產生之水面變化情形。

水壩崩潰問題主要是探討一個壩堤在瞬間崩潰後，水在重力作用下，其水面之演變及位能轉化為動能之變化，這個探討除了有學術上的傳統意義外，更有助於瞭解壩堤崩潰對環境之影響。在研究水面高度差所引起動力波之產生，對重力衝擊過程界面的演變及波的傳遞有重大意義，更可藉此瞭解動力波在水中傳遞時，其動、位能之演變情形。在研究移動隔板產生波浪及波浪在斜坡的運動，可探討固體邊界移動過程中對水介質之影響，並可探討產生之波浪在斜坡推進過程之演變，此探討有助於人類瞭解海邊波浪之沖刷及影響。研究矩形艙體水平晃動之水面變化，主要在於探討因晃動造成艙體邊界擠壓水介質產生之液體運動。

3.1 水壩崩潰問題

本模擬在初始時，均勻分布水粒子於 $0 \leq x \leq 0.3$ 及 $0 \leq y \leq 0.3$ 之矩形區域，採用之粒子數為 $n = 60 \times 60$ ，每一個粒子所佔之區域大小為 $(0.005)^2 m^2$ ，每一計算時間間隔為

$\Delta t = 10^{-4}$ 秒，並在邊界 $y=0, 0 \leq x \leq 3$ 及

$x=0, 0 \leq y \leq 0.5$ 邊界上分佈固體邊界粒子，使水粒子在靠近固體邊界時會受到斥力排開，而不致產生非物理性之穿透壁面現象。

當計算開始進行時，水粒子受到重力作用逐漸往下方移動，而下方的流體粒子，由於受到壁面影響使流向轉向右方，形成流體右方自由面由上斜向右下方；而右邊自由面上方處的流體受內部流體由左向右擠壓，迅速由上方滑下，藉由其位能轉化為動能，使得自由面有方底部的流體以更快的速度向右移動，並逐漸降低其最大高度，形成一個由上往下之斜坡流動，見圖1及圖2。

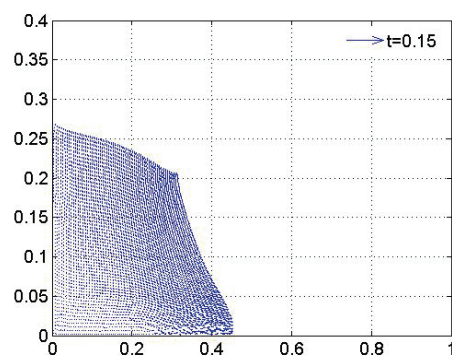


圖1 水壩崩潰在 $t=0.15$ 之水界質粒子分佈圖

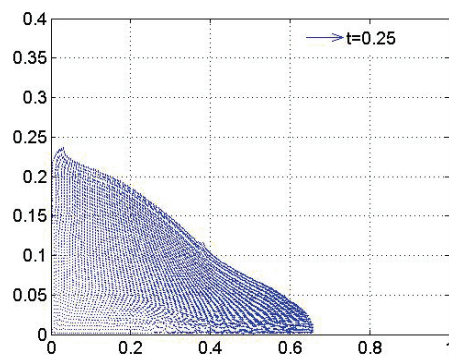


圖2 水壩崩潰在 $t=0.25$ 之水界質粒子分佈圖

3.2 水面高度不同產生重力波之演進

本模擬之初始條件為在邊界分佈固體邊界粒子，形成一個開口之矩形水箱，固體邊界粒子分佈於以下三處：
1. $x=0, 0 \leq y \leq 0.5$ ；
2. $y=0, 0 \leq x \leq 3$ ；
3. $x=3, 0 \leq y \leq 0.5$ 。並在區域 $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 0.15$

$$\sin(2\pi(x-1.25)) * [U(x-1.25) - U(x-1.75)]$$

均勻分佈水介質粒子，其中 $U(x)$ 為單位階梯函數，每個水介質粒子所佔之區域為 $(0.0025)^2 m^2$ (見圖3)，每一計算時間間隔為 $\Delta t = 10^{-4}$ 秒。由圖3可看出在初始時 $1.25 \leq x \leq 1.75$ 之水面有一個隆起，因此形成液面在 $y=0.15$ 處，不同 x 位置之粒子受到不同的壓力，因此流場存在壓力梯度，故可趨動流場運動。

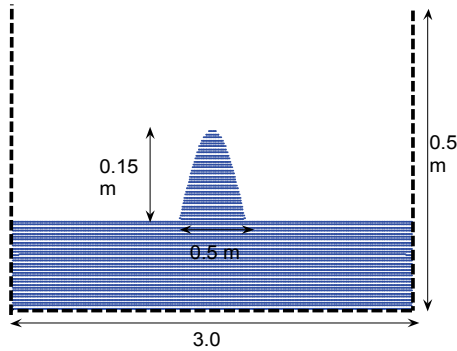


圖 3 水介質粒子初始分布圖

隨著時間的演進，水面凸起處因重力作用向下塌陷，因同一水平面所受之壓力正比於上方流體之高度，所以形成中央隆起最高處下方的流體以較大得速度往下衝擊，造成下方流體被排離原先的位置，而這些被排開的流體往兩側移動，因此造成隆起兩側流體往上升，並逐漸在原來隆起處之兩側行程兩個新的水面隆起，見圖 4 及圖 5，最後形成兩個水面波，在分別以相同速度向兩側移動（見圖 6）。

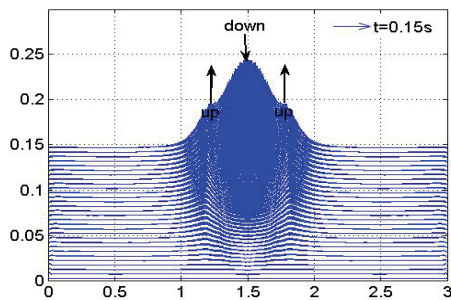


圖 4 重力波演進在 $t=0.15$ 之水界質粒子分佈圖

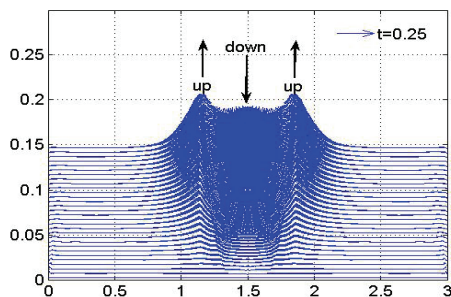


圖 5 重力波演進在 $t=0.25$ 之水界質粒子分佈圖

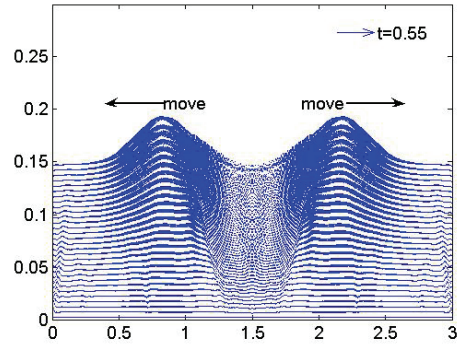


圖 6 重力波演進在 $t=0.55$ 之水界質粒子分佈圖

3.3 隔板移動產生水波及水波在斜面行進模擬

在這個例子，首先在 (1) $x=0, 0 \leq y \leq 0.5$ ，放置固體邊界粒子建立左邊移動之邊界；(2) 在 $y=0, 0 \leq x \leq 0.5$ 放置固體邊界粒子建立平坦底部；(3) 而後從點 $(0.5, 0)$ 往和水平線夾 5° 方向放置固體邊界粒子，並延伸 2.5m 長。最後，在邊界內高度低於 0.05m 範圍內均勻分佈水介質粒子，每個水介質粒子所佔之區域為 $(0.0025)^2 m^2$ 。隨著計算開始進行，左邊邊界以等速度 $u=0.8m/s$ 向右移動 0.3 秒，而後停止，每一計算時間間隔為 $\Delta t=10^{-4}$ 秒。

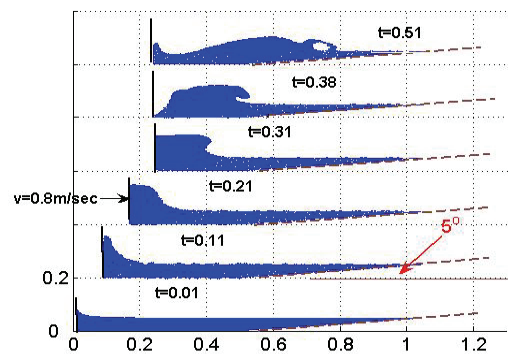


圖 7 產生自動板移動水波在斜坡前進演進圖

圖 7 為不同時刻波浪演進變化圖，由圖可發現在左邊動板移動過程中，水介質粒子受到動板擠壓，除了向右移動外，更不斷靠著動板提升高度，這告訴我們水受到動板擠壓除了向右移動外，更是向上堆疊質量。當動

板停止運動後，由於慣性作用，靠著動板的水粒子均有向右移動的趨勢，但下方之水介質粒子受到前方水粒子之阻擋，因此較上方水粒子移動的較慢，形成第一次波浪翻湧的產生，即上方水粒子捲起向前翻滾。當浪沖擊至斜坡，由於斜坡的作用使前方流體的速度變慢，後方上面水粒子超越前方粒子，形成立一個湧浪，隨著水沿斜坡持續前進，湧浪持續發生只是強度越來越弱。

3.4 矩形艙體水平晃動之水面演變

在這個例子，吾人首先在 $x=0, 0 \leq y \leq 0.5$ ， $x=1, 0 \leq y \leq 0.5$ ， $y=0, 0 \leq x \leq 1$ 等三個面放置固體邊界粒子，形成一個開口之矩形艙體。隨後在 $y=0.15$ 水平線下均勻置放水介質粒子，每個水介質粒子所佔之區域大小為 $(0.0025)^2 m^2$ ，每一計算時間間隔為 $\Delta t = 10^{-4}$ 秒。開始計算後，矩形艙以頻率 2 之水平速度 $u = \sin(2\pi ft)$ 進行週期運動。

在開始運動後，矩形艙首先以向右速度運動，由於慣性作用左邊界附近的水介質粒子靠著左邊界提升高度，而又邊界附近粒子則像水壩崩潰一樣往下流動並降低高度；經過半個週期後矩形艙轉向左運動，此時換成右邊界附近水位升高。在模擬過程中發現當左邊水面升高後，隨後會產生一個向右運動的水波；同樣，當右邊水面升高後，也隨後會產生一個向左運動的水波。因此一個週期的水平震盪會產生一個向右重力波及一個向左重力波，此兩個波互相衝擊產生水面震盪（見圖 8 及圖 9）。

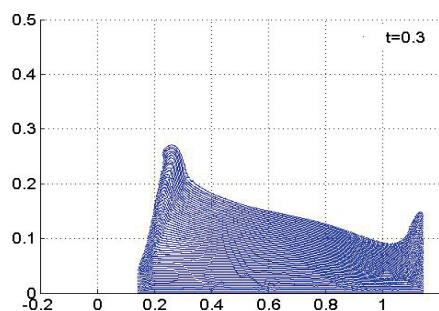


圖 8 矩形艙體水平晃動在 $t=0.3$ 之水介質粒子分佈圖

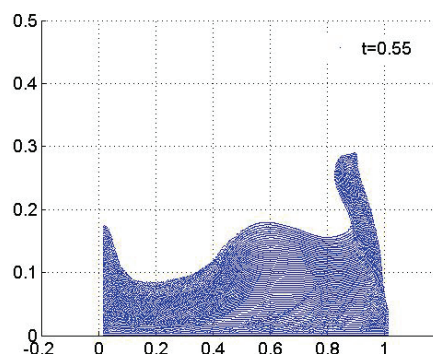


圖 9 矩形艙體水平晃動在 $t=0.55$ 之水介質粒子分佈圖

四、結論

不同情形下之水波之生成及演進被以光滑粒子流體動力法模擬探討，本文特別著重於探討固定及移動固體邊界數值處理方式。經由水壩崩潰、重力擠壓作用、動板推擠、及艙體搖晃等作用下，詳細之水面波動態變化之模擬探討，發現本文數值結果合理可信，足見本文數值模式之可靠性。並獲得下列數點物理上的結論：

1. 波浪沖擊斜坡模擬，發現由於斜坡的作用使前方流體的速度變慢，因此後方水粒子有超越前方粒子之趨勢，然下方之水介質粒子受到前方水粒子之阻擋，形成僅後方上面水粒子超越前方粒子，產生波浪翻湧之現象。
2. 重力擠壓作用於重力施加兩側會個別產生一個等大小以等速往兩邊運動之水波。
3. 水平晃蕩的非全滿艙體，在晃蕩過程中，壁面擠壓流體為水面波產生之主要機制，不同行進方向水面波互相衝擊造成水面震盪。

五、參考文獻

- [1] Liu, G. R., Gu, Y. T. 著, 王建明, 周學軍譯, 無網格法理論及程式設計, 濟南, 山東大學出版社, 2007.
- [2] 張雄, 劉岩, 無網格法, 北京, 清華大學出版社, 2004.
- [3] Springel, V., Smoothed Particle

- Hydrodynamics in Astrophysics, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 48, pp. 391-430, 2010.
- [4] Gingold, R. A., Monaghan, J. J., Smoothed Particle Hydrodynamics, Theory and Application to Non-Spherical Stars, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol.181, pp. 375-389, 1977.
- [5] Monaghan, J. J., Gingold, R. A., Shock Simulation by the Particle Method SPH, Journal of Computational Physics, Vol. 52, pp. 374-389, 1983.
- [6] Monaghan, J. J., On the Problem of Penetration in Particle Methods, Journal of Computational Physics, Vol. 82, pp. 1-15, 1989.
- [7] Monaghan, J. J., Simulating Free Surface Flows with SPH, Journal of Computational Physics, Vol. 110, No. 2, pp. 399-406, 1994.
- [8] Monaghan, J. J., Kocharyan, A., SPH Simulation of Multi-Phase Flows, Computer Physics Communications, Vol. 87, No. 1-2, pp. 225-235, 1995.
- [9] Monaghan, J. J., SPH without a Tensile Instability, Journal of Computational Physics, Vol. 152, No. 2, pp. 290-311, 2000.
- [10] Leonardo, D. G. S., Hender, L., Arnaldo, D., Eloy, S., Jaime, K., A Shock-Capturing SPH Scheme Based on a Adaptive Kernel Estimation, Journal of Computational Physics, Vol. 212, pp. 124-149, 2006.
- [11] Price, D. J., Modeling Discontinuities and Kelvin-Helmholtz Instability in SPH, Journal of Computational Physics, Vol. 227, pp. 10040-10057, 2008.
- [12] Monaghan, J. J., Kos, A., Solitary Waves on a Cretan Beach, Journal of Waterway, port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 125, No. 3, pp. 145-154, 1999.
- [13] Monaghan, J. J., Kos, A., Issa, N., Fluid Motion Generated by Impact, Journal of Waterway, port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 129, No. 6, pp. 250-259, 2003.
- [14] Gui, Y., Wu, W., Gong, K., Liu, H., Numerical Simulation of Sloshing in Two-Dimensional Rectangular Tanks with SPH, Chinese Journal of Hydrodynamics, Vol. 23, No. 6, pp. 618-624, 20008.
- [15] Zheng, K., Sun, Z. C., Sun, J. W., Numerical Simulations of Water Wave Dynamics Based on SPH Method, Journal of Hydrodynamics, Vol. 21, No. 6, pp. 843-850, 2009.
- [16] Liu, G. R., Liu, M. B. 著, 韓旭, 楊剛, 強洪夫 譯, 光滑粒子流體動力學:一種無網格粒子法, 長沙, 湖南大學出版社, 2005.

