

微衛星姿態翻滾強健控制使用脈寬脈頻調變推力器之分析與設計

Analysis and Design of Robust Attitude Detumbling Control Using Pulse-Width Pulse-Frequency Modulation for Micro-Satellite

壽鶴年、霍立珍、柳復華、林麗鳳

Ho-Nien Shou, Lih-Jen Huoh, Fu-Hwa Liu, and Lih-Feng Lin

空軍航空技術學院

航空通訊電子系

Department of Aviation & Communication Electronics

Air Force Institute of Technology

摘要

小(微)衛星進行的任務的能力從早期的軍事用途發展至氣象預測、資源探勘、通訊及科學實驗等方面。小(微)衛星擁有機械結構簡單、可靠性高、價格低廉、研究人員與設備精簡等優點。所以設計成本低、製作時間短、及高精度的微小衛星便成為各大學及小型科技機構主要研究之領域。我國第二期太空計畫預計以自主發展微衛星為主要里程碑，並期望使用自主載具進行發射。本文目的為探討微衛星脫離載具初入軌道之姿態控制問題。主要將藉由推力進行抑制衛星轉動及姿態穩定控制，並使用軟體迴路(Software-in-the-Loop, SIL)與處理器迴路(Processor-in-the-Loop, PIL)來實現。

關鍵字：微衛星姿態翻滾強健控制，軟體迴路，處理器迴路。

Abstract

The objective of the project is to analysis and design of micro-satellite detumbling control. As the satellite was separates from the launch vehicle into orbit around the earth, an initial high angular rate is generated. The project focuses on robust attitude detumbling control to decrease the high three axis angle rate. Nonlinear spacecraft containing mismatched: thruster canted inaccuracy angle, the function of center of mass offset dependent on the thrusters are mounted a distance, the disturbing on the spacecraft may be attributed to gravity gradient, solar pressure, atmospheric drag and so on. The nonlinear controller is designed to achieve disturbance attenuation and to resist parameter uncertainty varying as well as asymptotically stability. The nonlinear controller is composite of pulse-width pulse-frequency modulated (PWPF) thrusters based on state feedback attitude control law. The solution of the nonlinear robust control problem is known to be related to the existence of solution to a Hamilton-Jacobi inequality. In the project, a solution for spacecraft attitude control is conjectured and shown to satisfy the robust criterion. The simulations show that the use of PWPF thrusters state feedback provides several important advantages over conventional bang-bang thruster control, including less thruster activity, smoother control action, and closed to linear actuation. The method is applied to the microsatellite orbit launched control problem to verify its effectiveness.

Keywords : attitude detumbling control, Software-in-the-Loop, Processor-in-the-Loop

一、前言

衛星從載具脫離進入任務軌道之前，會有大翻滾帶著高角速度旋轉姿態，或初始旋轉角速度超出設計容忍值時，姿態控制系統其作用為抑制翻滾和降低角速度，以利衛星進入任務軌道達成指向定位。若姿態控制系統採用推力器產生推力以矯正姿態，其優點為不受外在環境限制、易於操作、可配合任何控制方法、修正時間快速，且指向精度高。衛星內部不確定性為噴嘴配置距離有誤差、推力器噴嘴傾斜面不精確、氣體燃料使用使質量中心偏移等。衛星外部擾動如高度及位置對重力梯度、空氣阻力及磁力等環境因素等。噴嘴使用開關閥控制易產生開關型控制(bang-bang control)，無法如線性開關有高燃料效率，脈寬脈頻調變器可同時解決推力器上述問題。

考慮衛星姿態處於系統不確性與外擾並存時最惡劣狀況下(worst case)，採用強健性控制理論結合脈寬脈頻調變器是小(微)衛星從克服大翻滾、高旋轉角速度和高精度指向任務姿態控制法則。本文將上述問題最佳控制器為求解漢彌頓偏微分不等式(Hamilton-Jacobi inequality)。當內部參數變化外部擾動時衛星姿態能滿足任務要求。

本文之目的為衛星入軌精度與姿態控制理論分析與設計，奠定有關微衛星之研究基礎，欲更精進發展出微衛星更小具地球觀測功能之微微級衛星姿態控制態技術，並進一步製作出衛星工程實體與飛行體。此一研究之目標為：

1. 有效落實微型衛星設計於學術單位，並進而推廣，擴大參與面。
2. 實際地延伸我國的微型衛星基礎之研究，增進地球觀測之功能。
3. 強化學校對微型衛星次系統之分析、設計與整合測試的能力。
4. 整合國內產官學界技術，開發微型衛星之相關元件。

衛星姿態或軌道控制時常併入數種不

同致動器(actuator)交互使用，包括改變衛星慣性矩裝置和推力器(thruster)，改變衛星慣性矩裝置如動量輪(moment wheels)、制動輪(reaction wheels)、制力矩陀螺群(control moment gyros)所能提供力矩為0.02-1牛頓·米，推力器提供力矩範圍為0.01-30牛頓·米之間 [1]。衛星從載具脫離進入任務軌道之前，初始會有大翻滾帶著高角速度旋轉姿態，若採用改變慣性矩裝置將無法抑制翻滾和降低角速度[2]。推力器系統產生推力以矯正姿態的誤差，其優點為不受外在環境限制、易於操作、可配合任何控制方法、修正時間快速，且指向精度高，最高可達 0.001° 的指向精度，缺點為有限度使用，若能提高使用效率將可延長使用時間[3]。

本文內容著重於(1)推力器位置配置設計，(2)以衛星姿態角速度、四元素作狀態回授作為推力器命令，(3)考慮當推力器位置距離有誤差、推力器噴嘴傾斜面不精確、氣體燃料使用使質量中心偏移為衛星內部不確定性，(4)外部擾動如衛星高度及位置對磁力、重力梯度及空氣阻力等環境因素等，(5)推力器使用脈寬脈頻調變器能將開關型控制轉化為相應的精確線性控制開關，(6)將上述問題系統地闡述以漢彌頓偏微分不等式[4][5]，求解出此漢彌頓偏微分不等式即為減少外擾與抑制系統參數不確性衛星姿態控制器。強健控制理論在能量消耗限制不同情況下可實現快速、節能的控制過程。

本文內容結構如下：第二節問題闡述，第三節衛星推力的產生-力矩推導，第四節為推力器之脈寬調變法則，第五節為卡爾曼濾波器介紹與不同的演算的方法第六節為軟體迴路(Software-in-the-Loop, SIL)與處理器迴路(Processor-in-the-Loop, PIL)之實現，最後一節為未來展望、實現與結論。

二、問題闡述

考慮衛星姿態運動方程式：

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}^\times & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (1a)$$

衛星非線性動態方程式

$$(J + \Delta J) \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega}^\times (J + \Delta J) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_w + \boldsymbol{\tau}_u \quad (1b)$$

$$(i) \quad \mathbf{q} = [\mathbf{q}^T \quad q_4]^T = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$$

為四元素，四元素法的觀念是將一個剛體依三個尤拉角 (*Euler angle*) 的旋轉順序，轉至一個新姿態，等效成將剛體繞著某一特定方向旋轉某一角度所得姿態。設此一特定方向為 $\bar{e} = [e_x \quad e_y \quad e_z]^T$ 而繞此方向旋轉角度為 φ 。

(ii) $\boldsymbol{\omega}$ 為衛星體座標上角速度，其中

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T,$$

$$\boldsymbol{\omega}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \text{ 為對應 } \boldsymbol{\omega} \text{ 反對}$$

稱矩陣。

(iii) $J + \Delta J$ 為衛星慣性矩矩陣，

$$J + \Delta J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \Delta J_{xx} & \Delta J_{xy} & \Delta J_{xz} \\ \Delta J_{xy} & \Delta J_{yy} & \Delta J_{yz} \\ \Delta J_{xz} & \Delta J_{yz} & \Delta J_{zz} \end{bmatrix} \text{ 其中 } J_{ii} \text{ 為 } i \text{ 軸}$$

方向轉動慣性矩，其中 ΔJ_{ij} 為 i 軸沿 j 軸方向轉動慣性矩，當燃料使用時會改變衛星系統質量中心，為衛星系統參數不確定項。

(iv) $\boldsymbol{\tau}_w$ 表示衛星在太空環境中會受到干擾力矩，干擾力矩有重力梯度力矩、空氣阻力力矩以及磁場干擾力矩。

(v) $\boldsymbol{\tau}_u$ 表示衛星姿態控制力矩，在計畫中先由強健控制理論推導得到 $\boldsymbol{\tau}_u$ 與推力器矩陣輸入 $\mathbf{u}$ 關係，再以脈寬調變器命令結合噴嘴閥產生推力。

(vi) 本文所提使用脈寬調變器與強健控制器合成，使用軟體迴路測試，結果如預期。

三、衛星推力的產生-力矩推導

衛星運動座標方向如圖 1 所示，衛星的 4 個推力噴嘴置於 x - y 平面傾斜 λ 角度，噴嘴方向朝 $-z$ 方向，排列成正方形相距離 d 。燃料槽於噴嘴 x - y 平面 l 距離 $+z$ 方向於衛星重心位置，如圖 2 所示。 $\Delta\lambda$ 、 Δd 和 Δl 各表示為噴嘴傾斜角度、噴嘴相對距離和燃料槽重心位置偏移的不確定性，以下列為推力產生力矩 $\boldsymbol{\tau}_u$ 的推導如下：

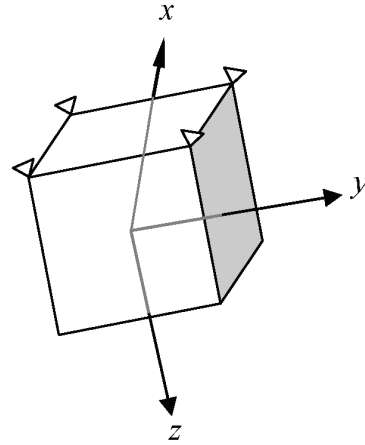


圖 1 衛星座標方向

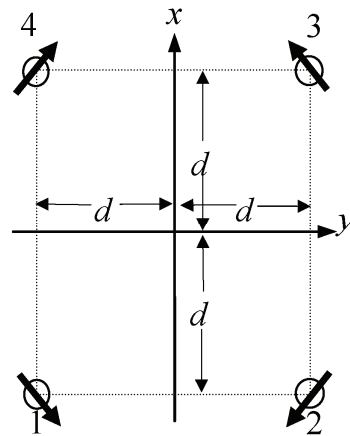


圖 2 衛星噴嘴幾何座標

$$\begin{aligned}
 \tau_u &= \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \\
 &= (\vec{r} \times \vec{F}) u \\
 &= [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 \quad \vec{r}_4 \times \vec{F}_4] u \\
 &= \begin{bmatrix} -\beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & -\beta_2 & \beta_2 & \beta_2 \\ -\beta_3 & \beta_3 & -\beta_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -\Delta\beta_1 & \Delta\beta_1 & \Delta\beta_1 & -\Delta\beta_1 \\ -\Delta\beta_2 & -\Delta\beta_2 & \Delta\beta_2 & \Delta\beta_2 \\ -\Delta\beta_3 & \Delta\beta_3 & -\Delta\beta_3 & \Delta\beta_3 \end{bmatrix} u \\
 &= (B + \Delta B) u
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \begin{bmatrix} -(d+\Delta d) & -(d+\Delta d) & (d+\Delta d) & (d+\Delta d) \\ -(d+\Delta d) & (d+\Delta d) & (d+\Delta d) & -(d+\Delta d) \\ -(l+\Delta l) & -(l+\Delta l) & -(l+\Delta l) & -(l+\Delta l) \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \\
 \vec{F} &= \begin{bmatrix} -\rho \sin(\lambda+\Delta\lambda) & -\rho \sin(\lambda+\Delta\lambda) & \rho \sin(\lambda+\Delta\lambda) & \rho \sin(\lambda+\Delta\lambda) \\ \rho \sin(\lambda+\Delta\lambda) & -\rho \sin(\lambda+\Delta\lambda) & -\rho \sin(\lambda+\Delta\lambda) & \rho \sin(\lambda+\Delta\lambda) \\ -\cos(\lambda+\Delta\lambda) & -\cos(\lambda+\Delta\lambda) & -\cos(\lambda+\Delta\lambda) & -\cos(\lambda+\Delta\lambda) \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \\
 \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta_1 = d + \alpha\lambda l, \\
 \beta_2 &= d - \alpha\lambda l, \quad \beta_3 = \frac{\lambda d}{\alpha}, \\
 \Delta\beta_1 &= \Delta d - \lambda\Delta\lambda(d+\Delta d) + \alpha(\lambda\Delta l + l\Delta\lambda + \Delta\lambda\Delta l), \\
 \Delta\beta_2 &= \Delta d - \lambda\Delta\lambda(d+\Delta d) - \alpha(\lambda\Delta l + l\Delta\lambda + \Delta\lambda\Delta l), \\
 \text{和} \\
 \Delta\beta_3 &= \frac{1}{\alpha}(\lambda\Delta d + d\Delta d + \Delta\lambda\Delta d)
 \end{aligned}$$

推力轉換力矩陣 B 有下列特性：

$$(1) \quad \text{rank}(B + \Delta B) = \min\{m, n\}$$

$$(2) \quad (B + \Delta B)(B + \Delta B)^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4(\beta_1 + \Delta\beta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 4(\beta_2 + \Delta\beta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 4(\beta_3 + \Delta\beta_3) \end{bmatrix}$$

四、推力器之脈寬調變法則：

依推力控制器與PWM工作週期可分為 off-modulation 與 on-modulation 兩種工作模式，如圖4 PWM法則方塊圖所示。由圖4 得知在 off-modulation 工作模式中，在整個工作週期內至少有一個推力器工作；在 on-modulation 工作模式中，整個工作週期內工作至少有一個推力器不工作，在本文中是採用 on-modulation 工作模式。

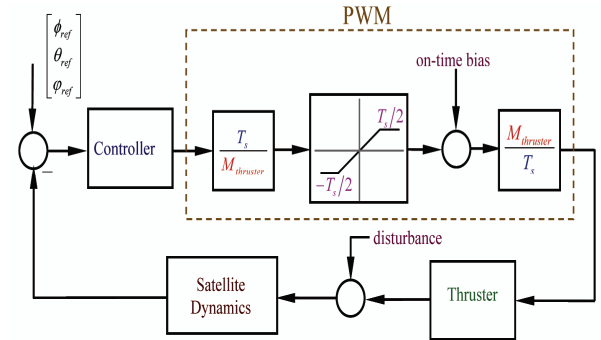


圖 3 微衛星姿態控制脈寬調變推力器方塊圖

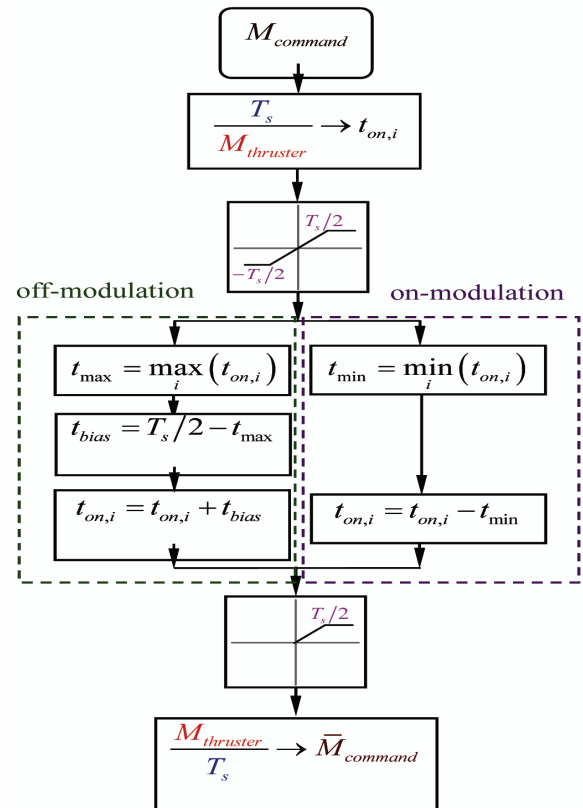


圖 4 脈寬調變 on/off modulation 控制流程圖

五、卡式爾曼濾波器

非線性狀態估計是指基於非線性系統的輸入、輸出觀測數據估計其不可測的內部狀態。非線性狀態估計在科學研究和工程應用領域具有重要價值，如工業過程中的狀態反饋控制、航空制導系統、飛行軌跡重構、飛行目標跟蹤、環境監控、故障診斷、生化反應狀態提取等。通常有兩類非線性狀態估計器(estimator)，一類是濾波器(filter)，它是以帶有隨機雜訊的非線性系統為研究對象，另一類是觀測器(observer)，它是以非線性確定性系統為研究對象。

對衛星的姿態估計，一般歸結為一個非線性系統的濾波問題。在非線性濾波方法中，擴展式卡爾曼濾波(Extend Kalman Filter, EKF)由於方法簡單、容易實現、快速收斂等優點而得到最廣泛的應用。但是，EKF需要對量測方程進行線性化近似以求取賈可比(Jacobian)矩陣，容易引入線性化誤差，造成估計精度降低。

傳統卡爾曼濾波器(Kalman Filter, KF)僅適用於線性系統中，工程系統大多為非線性系統，這時欲使用卡爾曼濾波器就必須適時的修正。擴展式卡爾曼濾波器是針對非線性系統的狀態方程與觀測方程採取泰勒級數(Taylor Series)展開的線性化方法，當系統存在著諸多高階導數項時，也就是高非線性系統時，擴展式卡爾曼濾波器線性化方法會導致濾波器性能下降甚至發散的情況，而且在求解過程裡必須求取賈可比矩陣(Jacobian matrix)矩陣，這對於系統模型複雜性高的系統來說是不易去解算的。

樣點卡式爾曼濾波器(Unscented Kalman Filter, UKF)演算法則是透過一確定性採樣的方法獲得一組標準點(sigma point)，經由標準點對系統之非線性模型進行非線性轉換(unscented transform)，這樣一來無需對系統模型進行線性化的動作，也就避免掉了線性化之後所引入的誤差，使得濾波器的狀態估計精準度大大提高，而且樣點式卡爾曼濾波

器也不用求取計算繁雜且易出錯的賈可比矩陣，大大的提升其便利性。

本文使用樣點式卡爾曼濾波器於微衛星姿態翻滾模擬，並與擴展式卡爾曼濾波器進行分析與比較，在相同模擬條件下樣點式卡爾曼濾波器所估測之結果相較於擴展式卡爾曼濾波器來得更加準確，定位精度更高，而且其實現速度更快。

於討論卡式爾曼濾波器前，關於四元素方程式於 $t+\Delta t$ 和小角度 $\Delta\varphi$ 的說明[1]

$$\mathbf{q}(t+\Delta t)$$

$$= \left(\sin \frac{\Delta\varphi}{2} \begin{bmatrix} 0 & e_z & -e_y & e_x \\ -e_z & 0 & e_x & e_y \\ e_y & -e_x & 0 & e_z \\ -e_x & -e_y & -e_z & 0 \end{bmatrix} + \cos \frac{\Delta\varphi}{2} I_4 \right) \mathbf{q}(t) \quad (2)$$

對小角度 $\Delta\varphi$ 而言，近似的觀念可得

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{1}{2} \omega\Delta t$$

$$\cos \frac{\Delta\varphi}{2} \approx 1$$

所以式(2)成為

$$\mathbf{q}(t+\Delta t) = \left(\frac{1}{2} \Omega \Delta t + I_4 \right) \mathbf{q}(t) \quad (3)$$

其中

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix}$$

對式(3)求導函數

$$\dot{\mathbf{q}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t+\Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \Omega \mathbf{q} \quad (4)$$

改寫式(4)可得

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Lambda \omega \quad (5)$$

其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix}$$

5.1 擴展式卡爾曼濾波器

設非線性系統狀態模型及量測動態模型表示為[2][3][4]

$$x_{k+1} = f(x_k) + w_k \quad (6a)$$

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad (6b)$$

其中

x_k 為在 k 時刻之系統狀態向量

$f(\square)$ 為非線性系統模型

w_k 為在 k 時刻之系統動態雜訊

z_k 為在 k 時刻之量測動態向量

$h(\square)$ 為非線性系統量測模型

v_k 為在 k 時刻之量測動態雜訊

若是雜訊 w 及 v 之機率分佈為隨機任意的, 則(6)式為一般的離散非線性系統模型。但這類系統對於最佳估測求解是非常不方便的, 因此為了使估測問題得到可行之解答, 必須對雜訊的統計特性給予符合實際而又方便計算之假設, 於一般工程問題中, 對 w 及 v 設為彼此互不相關且均值為零的高斯白雜訊。

其系統誤差之協方差矩陣 (Covariance Matrix) Q_j 如下:

$$E\{w_i w_j^T\} = \begin{cases} Q_j, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

與觀測誤差之協方差矩陣 (Covariance Matrix) R_j 如下:

$$E\{v_i v_j^T\} = \begin{cases} R_j, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (8)$$

在此, w 與 v 是相互獨立不相關的

$$E\{w_i v_j^T\} = 0, \quad \forall i, j \quad (9)$$

假設在 t_k 時刻之前, 狀態程序有一事先 (a priori) 估測值 $\hat{x}_k^-$, 其中“ $\wedge$ ”表示在時刻 t_k 之估測值, 而“-”表示為未更新之狀態。則定義估測誤差為:

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \quad (10)$$

及相關誤差之協方差矩陣為:

$$\begin{aligned} P_k^- &= E\{e_k^- e_k^{-T}\} \\ &= E\{(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T\} \end{aligned} \quad (11)$$

假設(6)式為一般非線性系統, 當及之雜訊恆為零時, 系統模型(6)式的解則稱為非線性方程之解析解, 又稱為“預測參考狀態”或是“預測參考軌跡”, 記為

$$\hat{x}_{k+1}^- = f(\hat{x}_k^-) \quad (12a)$$

$$\hat{z}_k^- = h(\hat{x}_k^-) \quad (12b)$$

一般把非線性系統(6)式的數值解稱之為“真實狀態”或是“真實軌跡”。則非線性系統之真實運動狀態與預測參考運動狀態之誤差為

$$\Delta x_k = x_k - \hat{x}_{k+1}^- \quad (13a)$$

$$\Delta z_k = z_k - \hat{z}_{k+1}^- \quad (13b)$$

如果這些誤差夠小則可以將(6)式用泰勒級數展開, 並取第一階項

$$x_{k+1} = f(x_k) \Big|_{x_k = \hat{x}_k^-} + \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \Big|_{x_k = \hat{x}_k^-} \cdot \Delta x_k + w_k \quad (14a)$$

$$z_k = h(x_k) \Big|_{x_k = \hat{x}_k^-} + \frac{\partial h(x_k)}{\partial x_k} \Big|_{x_k = \hat{x}_k^-} \cdot \Delta x_k + v_k \quad (14b)$$

其中將(12)式帶入(14)式, 得

$$x_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \Big|_{x_k = \hat{x}_k^-} \cdot \Delta x_k + w_k \quad (15a)$$

$$z_k = \hat{z}_k^- + \frac{\partial h(x_k)}{\partial x_k} \Big|_{x_k = \hat{x}_k^-} \cdot \Delta x_k + v_k \quad (15b)$$

或

$$x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- = \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \Big|_{x_k = \hat{x}_k^-} \cdot \Delta x_k + w_k$$

$$z_k - \hat{z}_k^- = \frac{\partial h(x_k)}{\partial x_k} \Big|_{x_k = \hat{x}_k^-} \cdot \Delta x_k + v_k$$

可得非線性系統的線性誤差方程

$$\Delta x_{k+1} = \Phi_k \cdot \Delta x_k + w_k \quad (16a)$$

$$\Delta z_k = H_k \cdot \Delta x_k + v_k \quad (16b)$$

其中 Φ_k 為狀態誤差轉移矩陣

$$\Phi_k = \left. \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x_k)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x_k)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_k = \hat{x}_k} \quad (17)$$

及 H_k 為量測誤差矩陣：

$$H_k = \left. \frac{\partial h(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_k^-} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1(x_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1(x_k)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2(x_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2(x_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_2(x_k)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n(x_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_n(x_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_n(x_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_k = \hat{x}_k^-} \quad (18)$$

5.2 誤差 Δx_k 的擴展式卡爾曼濾波

由上述推導，誤差 Δx_k 的擴展式卡爾曼濾

波方程如下：

計算卡爾曼增益值：

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}$$

更新估測值：

$$\Delta x_k = \Delta x_k^- + K_k (\Delta z_k - H_k \Delta \hat{x}_k^-)$$

更新誤差之協方差矩陣：

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^-$$

預測參考狀態誤差：

$$\Delta x_{k+1}^- = \Phi_k \cdot \Delta \hat{x}_k$$

估測誤差之共變異數矩陣：

$$P_{k+1}^- = \Phi_k P_k \Phi_k^T + Q_k$$

其中：

$$\Phi_k = \left. \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_k}, \quad H_k = \left. \frac{\partial h(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_k^-}$$

5.3 擴展式卡爾曼濾波器在程式上的實現 衛星系統估測狀態：

$$\hat{x} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$$

狀態誤差轉移矩陣：

$$\begin{aligned} \Phi_k &\approx I_{7 \times 7} + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta t \\ &= I_{7 \times 7} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \Delta t \\ &= I_{7 \times 7} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} \end{bmatrix} \Delta t \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q_i} &= \frac{1}{2} \Omega \frac{\partial q}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} q \\ &= \frac{1}{2} \Omega \frac{\partial q}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \Lambda \frac{\partial \omega}{\partial q_i} \\ &= \frac{1}{2} \Omega \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{2} \Omega q \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{2} \Lambda \omega \right) \\ &= \frac{1}{2} \Lambda \frac{\partial \omega}{\partial \omega} \\ &= \frac{1}{2} \Lambda \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial q} = J^{-1} \left(\frac{\partial T_{c,mag}}{\partial q} \right) \Big|_{T_{c,mag} = m \times b_{body}}$$

$$= J^{-1} \left(\frac{\partial (M^* B)}{\partial \mathbf{q}} \right)$$

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} \omega_z & \frac{J_{xx} - J_{zz}}{J_{xx}} \omega_y \\ \frac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{yy}} \omega_z & 0 & \frac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{yy}} \omega_x \\ \frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{zz}} \omega_y & \frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{zz}} \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

輸出量測:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_m \quad \mathbf{H}_s \quad \mathbf{H}_g]^T$$

其中

磁力計量測輸出

$$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{b}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \hat{b}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{ECI}^{body}}{\partial q_i} \hat{b}_{ECI} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}^T$$

太陽感測器量測輸出

$$\mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{s}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \hat{s}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{ECI}^{body}}{\partial q_i} \hat{s}_{ECI} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}^T$$

陀螺儀量測輸出

$$\mathbf{H}_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\omega}}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\omega}}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}^T$$

$$= [\mathbf{0}_{3 \times 4} \quad \mathbf{I}_{3 \times 3}]^T$$

5.4 樣點式卡爾曼濾波器

樣點式濾波演算法的基本思想與擴展式濾波相同都是採取卡爾曼濾波器的遞推公式，通過系統狀態均值與誤差協方差的遞推

及觀測量的訊息來進行更新，也由於是採取卡爾曼濾波器之架構，所以樣點式濾波器也稱為樣點式卡爾曼濾波器。

樣點式卡爾曼濾波器與擴展式卡爾曼濾波器不同的地方就在於樣點式不採取線性化的方法，而是經由非線性轉換來處理狀態均值與誤差協方差的遞推與更新，非線性轉換是一種計算隨機變量的非線性變換統計特性的方法，主要思想是藉由一組經由確定性採樣方法所得到的樣本點，簡稱為標準點，透過這些標準點與系統裡非線性模型進行非線性轉換，這種思維就是“非線性估計算法應更接近系統的非線性本質”，而且不必求取系統方程式與量測方程式的賈可比矩陣，實現速度也就更快了。

樣點式變換是一種經由確定性採樣的方法得到了一組標準點，而透過這些標準點與系統裡的非線性狀態方程和量測方程之間的轉換過程，經過加權處理後便可求得比擴展式採取線性化方法更加準確的系統估計值。

根據上敘理論用下式子選取標準點:

$$\chi_0 = \hat{\mathbf{x}}_k^-$$

$$\chi_i = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \left(\sqrt{(n + \lambda) P_k} \right)_i^T \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

$$\chi_{i+n} = \hat{\mathbf{x}}_k^- - \left(\sqrt{(n + \lambda) P_k} \right)_i^T \quad i = 1, 2, \dots, n$$

計算權重值:

$$W_i^m = \frac{\varepsilon}{(n + \varepsilon)}$$

$$W_0^c = W_0^m + (1 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2) \quad (20)$$

$$W_i^m = W_i^c = \frac{1}{2(n + \varepsilon)}$$

其中 $\lambda = \varepsilon_1^2(n + \gamma) - n$, n 為向量維數, ε_1 通常設一小的正數 (e.g., $10^{-4} \leq \varepsilon_1 \leq 1$), 它決定標準點環繞於 $\mathbf{x}$ 的範圍, γ 為一比例因子通常默設為 0, 當處於高斯分佈下時取 2 為最佳, $\left(\sqrt{(n + \varepsilon) P_k} \right)_i$ 表示取矩陣方根的第 i 列。

非線性狀態模型與非線性量測模型之樣點式演算法流程如下：

$$x_{k+1} = f(x_k) + w_k \quad (21a)$$

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad (21b)$$

其中

x_k 為在 k 時刻之系統狀態向量

$f(\square)$ 為非線性系統模型

w_k 為在 k 時刻之系統動態雜訊

z_k 為在 k 時刻之量測動態向量

$h(\square)$ 為非線性系統量測模型

v_k 為在 k 時刻之量測動態雜訊

其系統誤差之協方差矩陣 (Covariance Matrix) Q_j 如下：

$$E\{w_i w_j^T\} = \begin{cases} Q_j, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (22)$$

與觀測誤差之協方差矩陣 (Covariance Matrix) R_j 如下：

$$E\{v_i v_j^T\} = \begin{cases} R_j, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (23)$$

在此， w 與 v 是相互獨立不相關的

$$E\{w_i v_j^T\} = 0, \quad \forall i, j \quad (24)$$

1. 產生標準點與計算權重值：

$$\chi_0 = \hat{x}_k^-$$

$$\chi_i = \hat{x}_k^- + \left(\sqrt{(n+\varepsilon)P_k} \right)_i^T \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\chi_{i+n} = \hat{x}_k^- - \left(\sqrt{(n+\varepsilon)P_k} \right)_i^T \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$W_i^m = \frac{\varepsilon}{(n+\varepsilon)}$$

$$W_0^c = W_0^m + (1 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2)$$

$$W_i^m = W_i^c = \frac{1}{2(n+\varepsilon)}$$

2. 時間更新：

狀態預測值

$$(\varsigma_k^-)_i = f((\chi_k)_i)$$

狀態預測值均值

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m (\varsigma_k^-)_i$$

協方差矩陣

$$P_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c \left[(\varsigma_k^-)_i - \hat{x}_k^- \right] \left[(\varsigma_k^-)_i - \hat{x}_k^- \right]^T + Q_k$$

3. 觀測更新：

觀測量預測值

$$(z_k^-)_i = h((\varsigma_k^-)_i)$$

觀測量預測值均值

$$\hat{z}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m (z_k^-)_i$$

P_{xy} 與 P_{yy} 更新

$$P_{xy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c \left[(\varsigma_k^-)_i - \hat{x}_k^- \right] \left[(z_k^-)_i - \hat{z}_k^- \right]^T$$

$$P_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c \left[(z_k^-)_i - \hat{z}_k^- \right] \left[(z_k^-)_i - \hat{z}_k^- \right]^T + R_k$$

計算卡爾曼增益值

$$K_k = P_{xy} P_{yy}^{-1}$$

由量測值更新估測值

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - \hat{z}_k^-)$$

更新狀態誤差協方差矩陣

$$P_{k+1} = P_k^- - K_k P_{yy} K_k^T$$

5.4 樣點式卡爾曼濾波器在程式上的實現

選取標準點：

$$\chi_0 = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$$

$$\chi_i = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T + \left(\sqrt{(7+\varepsilon)P_x} \right)_i \quad i=1,2,\dots,7$$

$$\chi_i = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T - \left(\sqrt{(7+\varepsilon)P_x} \right)_i \quad i=8,9,\dots,14$$

狀態誤差轉移矩陣:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \left(\frac{1}{2} \Omega \mathbf{q}_k \right) \Delta t + \mathbf{q}_k$$

$$\omega_{k+1} = J^{-1} \left(M^x b_k - \omega_k^x J \omega_k \right) \Delta t + \omega_k$$

磁力計座標轉換矩陣:

$$\hat{b}_k = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_4 + q_2 q_3) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \times b_{ECI,k}$$

太陽感測器座標轉換矩陣:

$$\hat{s}_k = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_4 + q_2 q_3) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \times S_{ECI,k}$$

六、軟體迴路

(SOFTWARE-IN-THE-LOOP, SIL)
與處理器迴路
(PROCESSOR-IN-THE-LOOP, PIL)
之實現

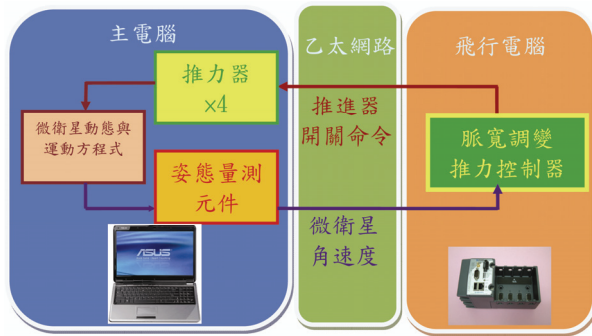
在計畫中微衛星姿態控制系統的期中完成軟體迴路測試驗證，在此驗證架構下，感測器與致動器的電氣介面皆使用數學函式達成。此驗證方式，可以驗證姿態控制系統軟體之功能與性能，但是當實際任務飛行階段時，因為感測器與致動器及其電氣介面都在

閉迴路內，故實際且完整之控制系統並未經嚴謹之驗證[5]。

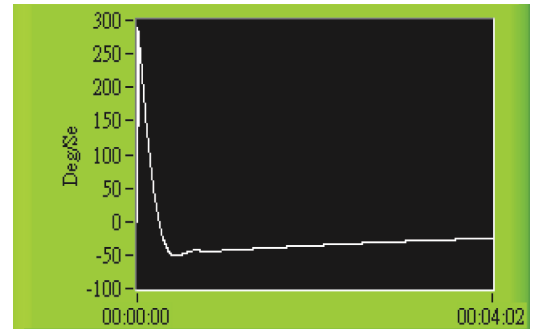
航太工程實驗發展衛星計畫之前常需先行完成姿態控制系統之發展、設計及驗證工作。期末完成以微衛星為對象，建立之控制器迴路系統。此系統(電腦)用以實現衛星姿態模擬測試器姿態模擬測試器，內部之中執行微衛星動態與運動方程式、環境模擬(環境干擾力矩、10階地球磁場)和姿態量測元件數學模型，另一個系統包含一個用以取代衛星姿態控制器的即時軟硬體系統(real time controller NI cRIO-9014)和姿態控制元件數學模型(on modulator PWM、Thruster)，如圖10所示。

6.1 軟體迴路

微衛星姿態控制器之設計分兩個階段驗證。第一階段是不加入感測元件與致動元件電氣介面之軟體迴路(Software-in-the-Loop)驗證，目的是先期驗證脈寬調變推力控制器在即時(real time)環境下之性能表現，其架構如圖10所示。主電腦(Host computer)中建構了微衛星動態與運動方程式、環境模擬(環境干擾力矩、10階地球磁場)和姿態量測元件數學模型，運算週期為0.25秒；而脈寬調變推力控制器則建構於具即使計算功能之飛行電腦中，運算週期為2秒。主電腦端透過乙太網路(Ethernet)將微衛星之三軸角速度訊號傳輸至飛行電腦端之脈寬調變推力控制器上，控制器經計算後會決定出二組(四根)推力器之開啟時間，並將推力器開啟時所造成之力矩再經由乙太網路回傳至主電腦端之微衛星動態與運動方程式中，完成一閉迴路之架構。軟體迴路驗證脈寬調變推力器於微衛星姿態在三軸起始翻滾角速度分別為[200, -200, 300]度/秒下之強健控制測試結果如圖11-13所示。



(a)方塊流程圖



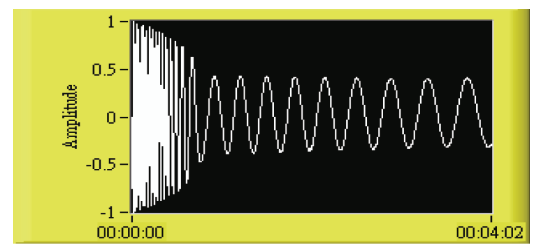
(c)Yaw rate



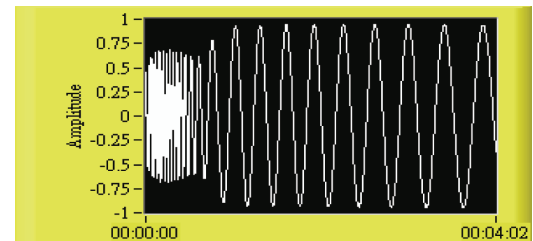
(b)測試實體圖

圖 10 軟體迴路測試架構

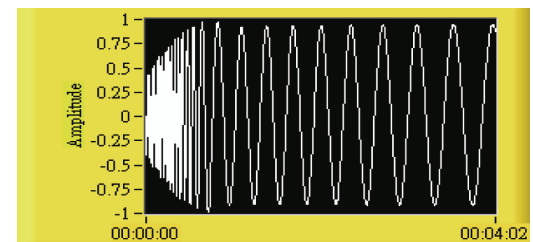
圖 11 姿態角變化率時間響應



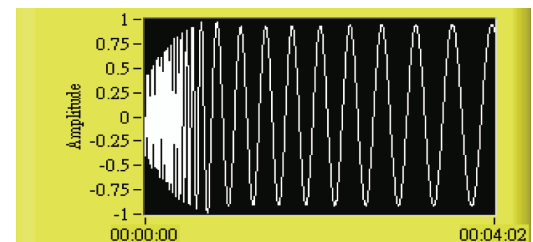
(a)Quaternion 1



(b)Quaternion 2

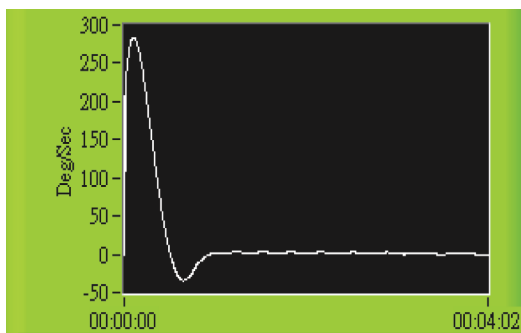


(c)Quaternion 3

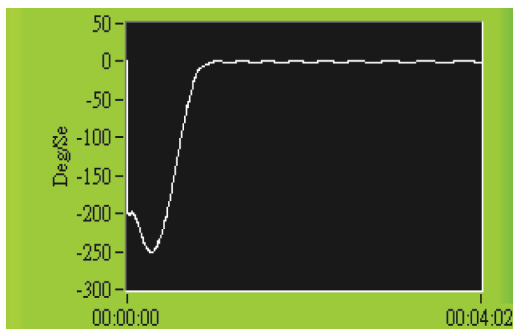


(d)Quaternion 4

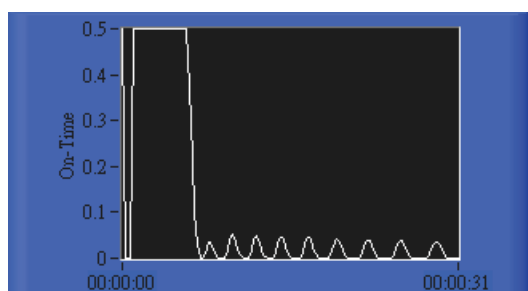
圖 12 四元數時間響應



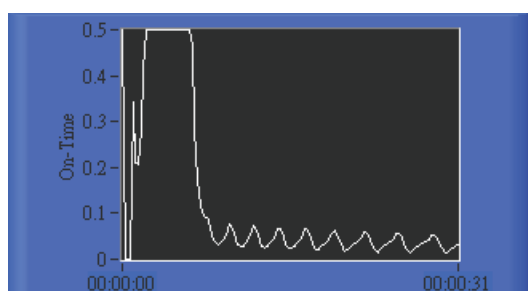
(a)Roll rate



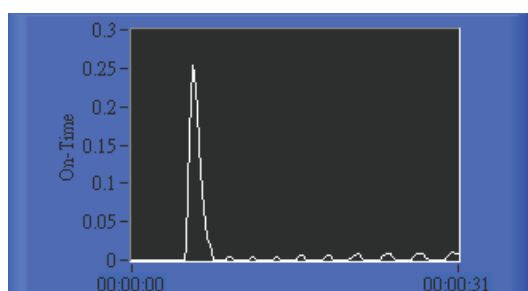
(b)Pitch rate



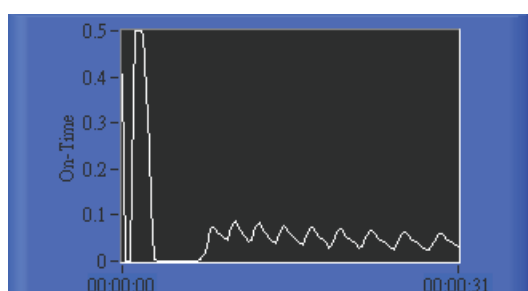
(a)Thruster 1



(b)Thruster 2



(c)Thruster 3



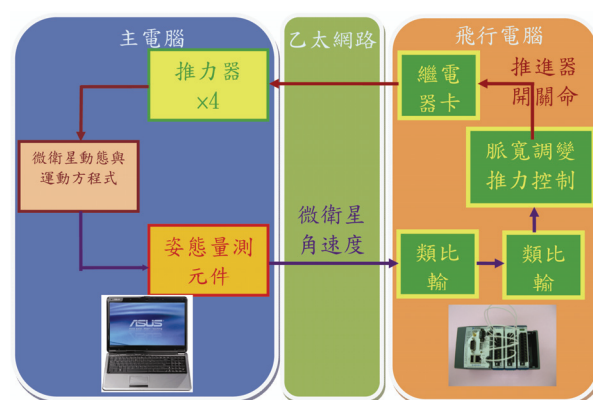
(d)Thruster 4

圖 13 噴嘴時間響應

6.2 處理器迴路

由於軟體迴路架構下無法驗證姿態量測元件與推力器之電氣介面特性，其須透過第二階段之處理器迴路(Processor-in-the-Loop)驗證[6]。圖14為處理器迴路之架構，其與軟體迴路之架構相似，不同處在於微衛星之三軸角速度值所對應之電壓訊號會經由飛行電

腦端之類比輸出卡(Analog Output)輸出至之類比輸入卡(Analog Input)後再轉換成對應之角速度值供脈寬調變推力控制器使用，且推進器之開啟命令會傳輸至控制推進器開關之繼電器卡(Relay)上。處理器迴路驗證脈寬調變推力器於微衛星姿態在三軸起始翻滾角速度分別為 $[200, -200, 300]$ 度/秒下之強健控制測試結果如圖15-17所示，其中姿態量測元件與推力器開關之電器介面是基於ADXR300EB 單軸陀螺儀與KSD-9602閥件(見表一)所設計。

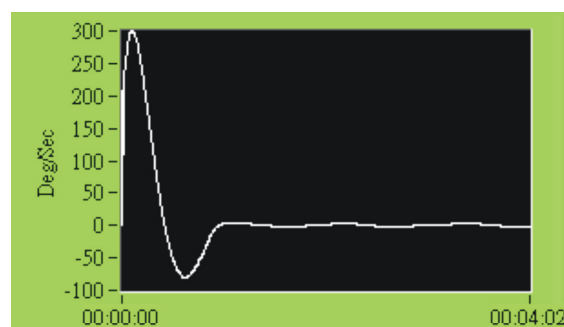


(a)系統方塊流程圖

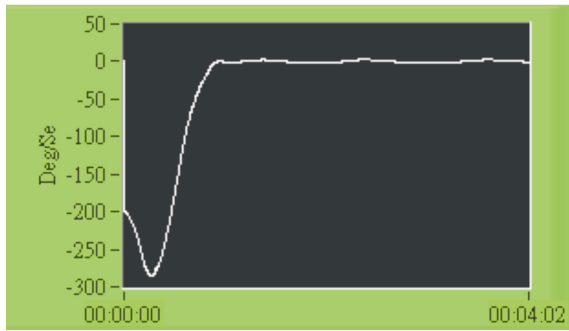


(b)測試實體圖

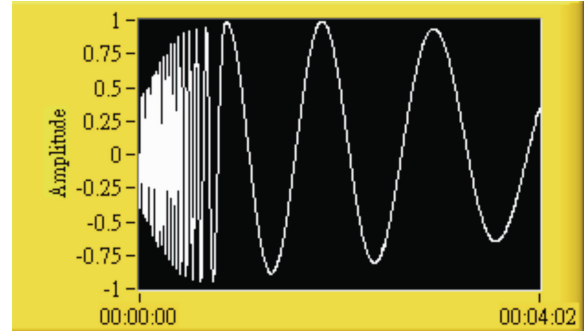
圖 14 處理器迴路測試架構



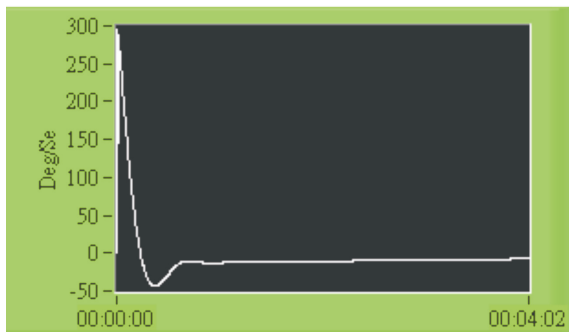
(a)Roll rate



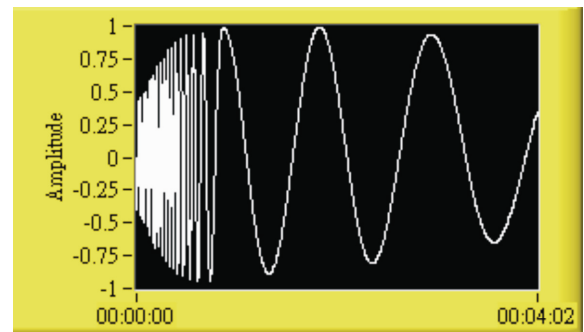
(b) Pitch rate



(c) Quaternion 3



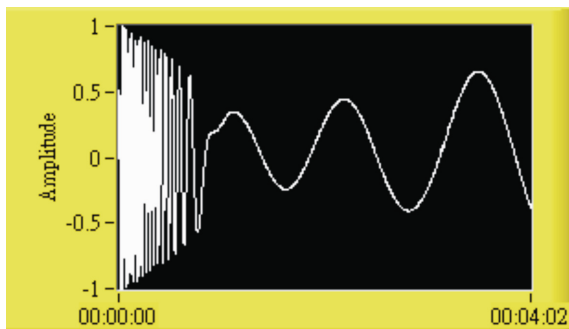
(c) Yaw rate



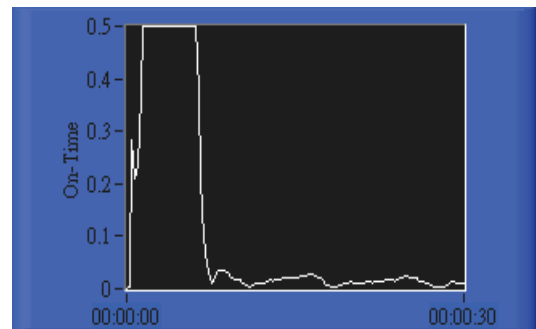
(d) Quaternion 4

圖 15 姿態角變化率時間響應

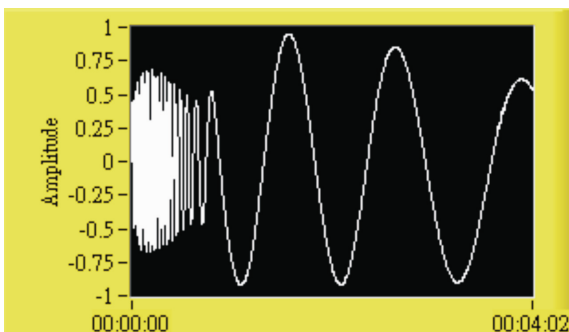
圖 16 四元素時間響應



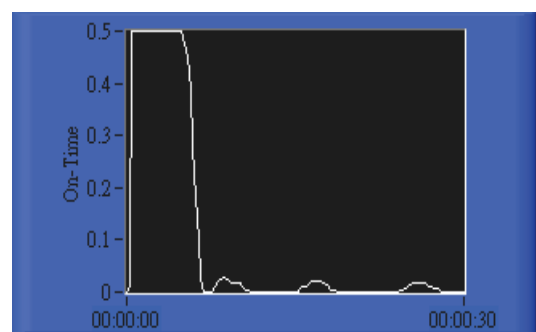
(a) Quaternion 1



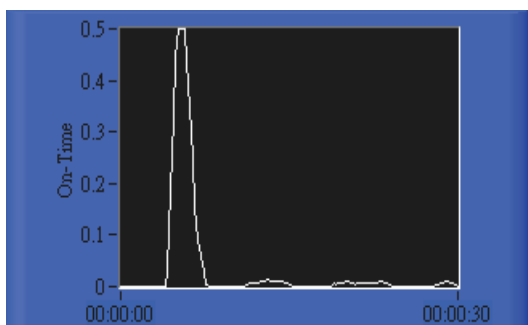
(a) Thruster 1



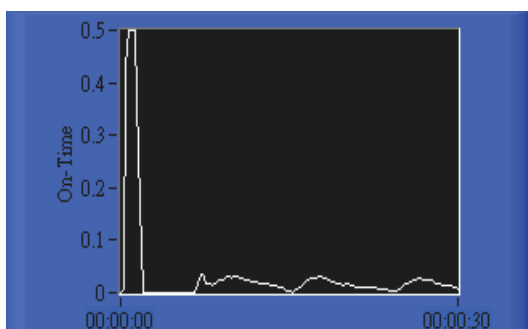
(b) Quaternion 2



(b) Thruster 2



(c)Thruster 3



(d)Thruster 4

圖 17 噴嘴時間響應

六、MATLAB/SIMULINK 程式模擬響應圖

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = 5 \text{ deg}, l = 0.24 \text{ m}, d = 0.25 \text{ m},$$

$$\Delta \lambda = \pm 0.1 \lambda, \Delta l = \pm 0.1 l, \Delta d = \pm 0.1 d$$

$$[\phi \ \theta \ \varphi] = [100 \ -36 \ -20] \text{ deg},$$

$$[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\varphi}] = [-1.2 \ -1.1 \ 23] \text{ deg/sec},$$

$$[J_{xx} \ J_{yy} \ J_{zz}] = [1.472 \ 1.452 \ 1.479] \text{ Nm}$$

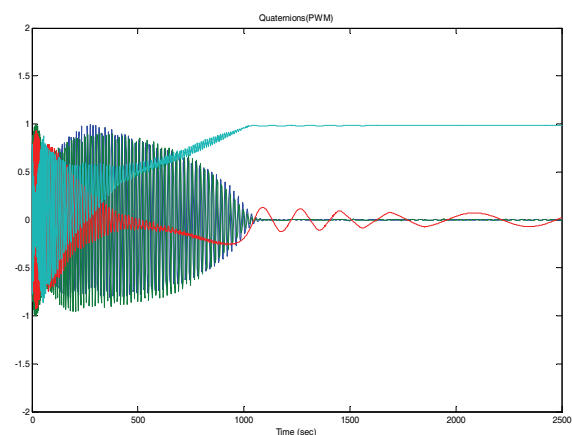


圖 5 Time Response of Quaternion

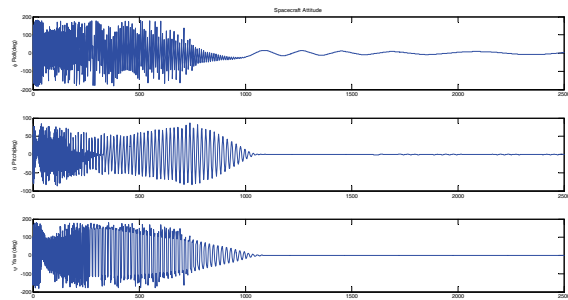


圖 6 Time Response of Spacecraft Attitude

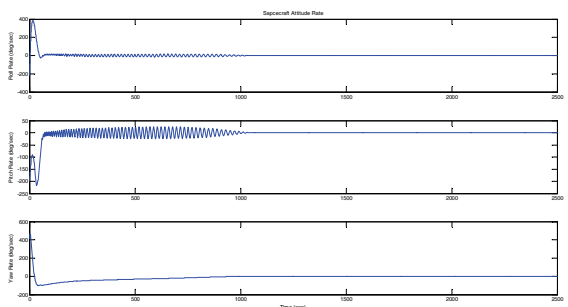


圖 7 Time Response of Spacecraft Attitude Rate

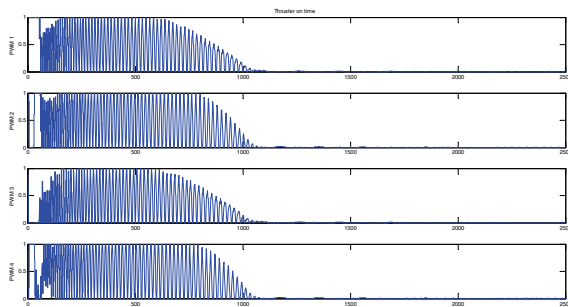


圖 8 Time Response of Thruster on time

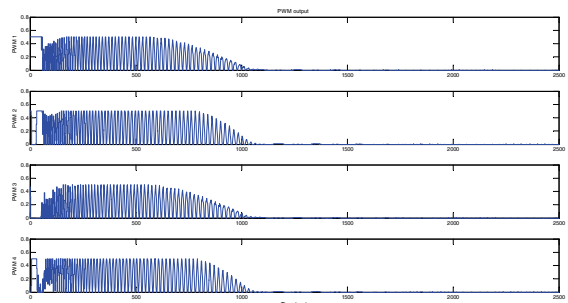


圖 9 Time Response of PWM output

七、誌謝

作者們感謝國科會專題研究案 NSC99-2221-E-344-002 和國家太空中心的計畫任

務發展及規劃案 NSPO-S-099135，關於工程技術諮詢、協助及研究經費上的贊助，並順利完成專題研究案。

八、未來展望與實現

衛星基本姿態感測器包含姿態感測器 (Attitude Sensors) 與姿態角速度感測器 (Attitude Rate Sensors) 兩種。姿態感測器有：太陽感測器 (Sun Sensor)、地平線感測器 (Horizon sensor)、磁場感測器 (Magnetometer)、恆星感測器 (Star Tracker)，但是姿態角速度感測器只有陀螺儀 (Gyro)，傳統上陀螺儀造價非常昂貴，也相對地不可靠 (參考點漂移，是主要的測量誤差源)，相較於姿態感測器容易故障。故隨著衛星技術普遍化，衛星價格也被要求降低，另外軟體與演算法技術之提升，使得以姿態資料經軟體處理而獲得姿態變化率資訊也越來越成熟，陀螺儀當然是工程師第一個想要拿掉的元件，因此無陀螺儀 (gyro-less) 的設計近年來研究驅勢。

研究中使用一種四元數偽量測模式 (bogus measurement model)，提供無陀螺儀衛星姿態確定演算法。該濾波算法不需要對量測方程作線性化近似，能夠有效提高衛星大姿態角情況下的姿態確定性能。並通過引入強健追蹤性，使演算法獲得了更高的收斂性。模擬結果顯示，演算法能夠有效的提高無陀螺儀衛星在初始姿態翻滾、三軸穩定等狀況下的姿態估計收斂速度，並能夠實現高速旋轉狀況下的姿態跟蹤。該演算法具有簡明的線性結構，計算負擔符合實時要求，結構簡單，對硬體配置要求不高。尤其適用於低成本的微(小)衛星。

對衛星的姿態估計，一般歸結為一個非線性系統的濾波問題。在非線性濾波方法中，擴展式卡爾曼濾波 (Extend Kalman Filter, EKF) 由於方法簡單、容易實現、快速收斂等優點而得到最廣泛的應用。但是，EKF 需要對量測方程進行線性化近似以求取賈可比 (Jacobian) 矩陣，容易引入線性化誤差，造成估計精度降低。

本論文提出了使用四元數的性質，得到線性的偽量測模式，避免了對量測方程作線性化近似。將此線性偽量測模式與四元數運動學方程相結合，構成了一種新型四元數卡爾曼濾波器 (Quaternion Kalman Filter, QKF)。由於系統狀態方程即四元數運動學方程也是線性的，二者結合構成的濾波器整體上具有線性結構，降低了演算法的複雜性。

研究方式為通過狀態擴展，將 QKF 進一步拓展到解決無陀螺儀情況下的姿態確定問題，並通過選用正規的角速度運動模型，保持了濾波器的線性特色。在此基礎上，本文進一步通過引入強健追蹤處理，以降低對角速度的估計偏差。在計算量增加不大的情況下，有效提高了無陀螺儀 QKF 的性能，加速了演算法的初始收斂，並獲得了對快速姿態運動的跟蹤能力 [6]。

九、參考文獻

1. H. Weidong, Z. Yulin, "Rate Damping Control for Small Satellite Using Thruster," *Acta Astronautica*, vol.55, pp.9-13, 2004.
2. B. N. Agrawal, R. S. McClelland and G. Song, "Attitude Control of Flexible Spacecraft Using Pulse-Width Pulse-Frequency Modulated Thrusters," *Space Technol.*, vol. 17, No. 1, pp.15-34, 1997.
3. J. Yuan, D. Yang, and H. Wei, "Flexible Satellite Attitude Maneuver Control Using Pulse-width Pulse-frequency Modulated Input Shaper," *International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics*, pp.1407-1412, 2006.
4. H. N, Shou and J, C, Juang, "An LMI-Based Nonlinear Attitude Control Approach," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol.11, no. 1, pp.73-83, 2003.
5. H, N, Shou and J, C, Juang, Y. W. Jan and C. T. Lin, "Quaternion Feedback Attitude

Control Design: A Nonlinear H_∞
Approach,” *Asian Journal of Control*, vol. 5,
no. 3, pp. 406-411, 2003.