

補償式梯型數值積分法在類比控制系統離散化之應用

Application of compensated trapezoidal numerical integration method on digitizing analogue control systems

柳復華、壽鶴年、林麗鳳、霍立珍、劉怡姍

Fu-Hwa Liu, Ho-Nen Show, Lih-Feng Lin, Lih-Jen Huoh, Yi-Na Liu

空軍航空技術學院航空通訊電子系

Department of Aviation & Communication Electronics Air Force Institute of Technology

摘要

本論文提出了一個新的類比控制器轉換到其離散型式的方法，當對連續時間下的響應作梯型積分時，發現有一個額外的幾何面積誤差是須要被考慮的，故其轉換關係式也應作合理的補償修正。在所提方法之轉換關係式中有一可調的補償參數，其可根據控制器的模型和取樣週期的大小來調整。當一適當的補償參數值在轉換關係式中被選取去離散化一控制系統時將顯得更為有效。因為所提之方法是針對雙線性轉換法進行改良，所以藉由所提之方法所離散之系統將會有更好的性能表現。由實例模擬的結果將可得到驗證。

關鍵字：梯型積分、雙線性轉換關係式、取樣週期

Abstract

This study presents a new discretization approach for converting an analogue controller into its corresponding counterpart for a discrete-time system. Based on the trapezoidal integration of the continuous-time response, an extra geometric area is considered, so that the discrete-time transformation is reasonably compensated. In the transformation of proposed method there is a flexible compensated parameter n which can be tuned in accordance with controller and sampling period. Thus a suitable n in our proposed transformation can be found to make effective compensation for a sampled-data system. Since our scheme is the improvement of bilinear transformation, the discrete system by the proposed transformation has better performance. This can be demonstrated from the simulation results.

Keywords : trapezoidal integration, bilinear transformation, sampling period

一、簡介

隨著數位計算機、類比到數位(A/D)及數位到類比(D/A)轉換器的快速發展，使得要數位化一個類比控制器變得簡單[1, 2]。數位化控制器

在可靠度(reliability)、精確度(accuracy)、抗電子雜訊(electronic noises)干擾上，通常是較優於類比控制器的[3]，然而，由於連續時間(continuous-time)控制系統的理論發展較早，所以現今大多數控制系統的控制其設計還是類比的模型。

為了能進行數位化的控制，必須將這些在連續時間下已完成設計的控制器轉換成其等效離散時間(discrete-time)的模型[4]，而經數位重設計後的系統，在相同的輸入和起始條件下，其表現也仍能與原類比系統非常地貼近。

一個類比控制器的最初設計是為了能滿足系統在連續時間下的性能表現，但其數位化後的響應卻常因數位化轉換過程中不可避免的誤差而有所偏離，且那偏離的現象在取樣週期不夠小時將更是明顯。然而，在實際工程系統的應用上，數位化控制器對取樣週期的選擇常是需要有較大容忍度的[5]，若只限於小的取樣週期去做離散化將是不切實際的。在本論文中，一個新的類比控制器離散轉換的方式將被提出，其是藉由補償的方式去改良雙線性(bilinear)轉換法。此外，一個離散的性能指標函數會被定義，以方便各種離散方法作性能的比較。最後，將以一個例子去驗證所提方法的有效。

二、補償方式

考慮一類比控制器，其轉移函數模型如下

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a}{s+a} \quad (1)$$

其中 a 是常數，而上式轉移函數的微分方程型式是

$$\frac{du(t)}{dt} + au(t) = ae(t) \quad (2)$$

若一個取樣週期 T 被使用去決定 $u(t)$ ，則式(2)可表示成如下的差分型式

$$u(kT+T) - u(kT) = -a \int_{kT}^{(k+1)T} u(t) dt + a \int_{kT}^{(k+1)T} e(t) dt \quad (3)$$

有數種方法是可以去得到上述類比控制器的離散等式[6, 7]。但若從幾何的觀點，式(3)右邊的每一積分項皆可用補償式的梯型積分法去計算得到。如圖一所示，被計算的面積可由面積 A_1 和面積 A_2 得到。其中 A_1 的值可由梯形積分規則得到

$$A_1 = \frac{T}{2} [y(kT+T) + y(kT)] \quad (4a)$$

而 A_2 則是一平行四邊形的面積如下

$$A_2 = \frac{T}{n} [y(kT+T) - y(kT)] \quad (4b)$$

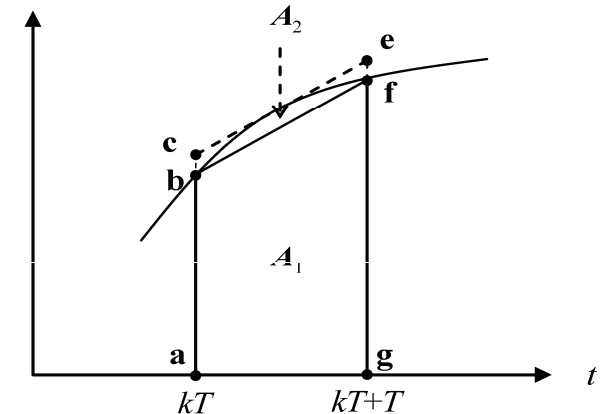
其中 n 是被選取的常數，一個正的常數(正補償)和一個負的常數(負補償)分別被選取如圖一(a)和圖一(b)所示。

很明顯的看到面積 A_2 是為了補償面積 A_1 ，所以其誤差也將會被降低。根據這樣的方法，式(3)可重寫如下

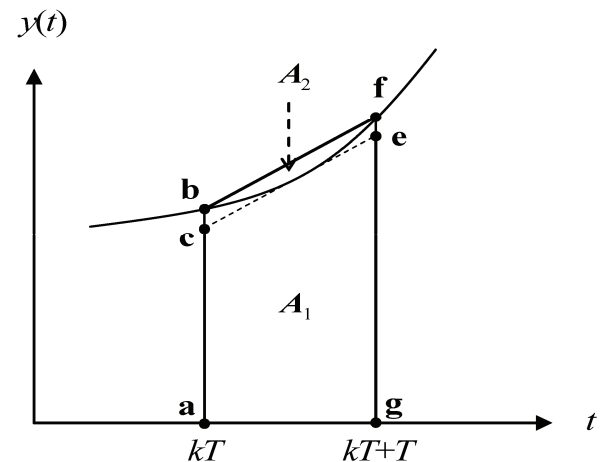
$$\begin{aligned} & u(kT+T) - u(kT) \\ &= -aT \left\{ \frac{1}{2} [u(kT+T) + u(kT)] + \frac{1}{n} [u(kT+T) - u(kT)] \right\} \quad (5) \\ &+ aT \left\{ \frac{1}{2} [e(kT+T) + e(kT)] + \frac{1}{n} [e(kT+T) - e(kT)] \right\} \end{aligned}$$

將式(5)作 z 轉換

$y(t)$



圖一(a)、補償式的梯型積分(正補償)



圖一(b)、補償式的梯型積分(負補償)

$$\begin{aligned} & \left[z \left(1 + \frac{aT}{2} + \frac{aT}{n} \right) - 1 + \frac{aT}{2} - \frac{aT}{n} \right] U(z) \\ &= \left[z \left(\frac{aT}{2} + \frac{aT}{n} \right) + \frac{aT}{2} - \frac{aT}{n} \right] E(z) \end{aligned} \quad (6)$$

其離散時間的轉移函數為

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{a}{\frac{2n(z-1)}{T[(n+2)z+(n-2)]} + a} \quad (7)$$

比較式(1)和式(7)，得到 s 和 z 的關係式

$$s = \frac{2n(z-1)}{T[(n+2)z+(n-2)]} \quad (8a)$$

方程式(8a)也可重寫表示如下

$$s^{-1} = \frac{T[(n+2)z+(n-2)]}{2n(z-1)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} + \frac{T}{n} \quad (8b)$$

當 $n = \infty$ ，則式(8b)變為

$$s^{-1} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \quad (9a)$$

或

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (9b)$$

而那即是眾所週知的雙線性轉換關係式。很明顯的看出雙線性轉換關係式其實只是所提方法的一個特例。如式(8)所示，一個新的可調整的雙線性轉換關係式產生，將很有用於取樣資料系統其類比控制器數位化的轉換。所提方法之離散時間狀態空間模型將在下節討論。

三、離散時間狀態空間之模型

考慮一線性非時變連續時間系統

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (10a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (10b)$$

其中 $x(t)$ 為 $m \times 1$ 的狀態向量， $u(t)$ 為 $q \times 1$ 輸入向量， $y(t)$ 為 1×1 的系統輸出，且 A 、 B 和 C 為常數矩陣。將式(10a)作拉氏轉換，得到

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \quad (11)$$

將式(8a)的結果代入到式(11)，得到其在 z 定義域下的關係式

$$\begin{aligned} & \frac{2n(z-1)}{T[(n+2)z+(n-2)]} x_p(z) \\ &= Ax_p(z) + Bu(z) \end{aligned} \quad (12a)$$

或

$$\begin{aligned} zx_p(z) &= \left[I_m - \frac{n+2}{2n} AT \right]^{-1} \left[I_m + \frac{n-2}{2n} AT \right] x_p(z) \\ &+ \left[I_m - \frac{n+2}{2n} AT \right]^{-1} \frac{BT}{2n} [(n+2)zu(z) + (n-2)u(z)] \end{aligned} \quad (12b)$$

$x_p(z)$ 的下標“ p ”意味是經由所提方式所

得的離散時間狀態，而 I_m 則是 $m \times m$ 的單位

矩陣。式(12b)可重寫成

$$\begin{aligned} x_p(kT+T) &= \left[I_m - \frac{n+2}{2n} AT \right]^{-1} \left[I_m + \frac{n-2}{2n} AT \right] x_p(kT) \\ &+ \left[I_m - \frac{n+2}{2n} AT \right]^{-1} \frac{BT}{2n} [(n+2)u(kT+T) + (n-2)u(kT)] \end{aligned} \quad (12c)$$

此即為經由所提方式所得到之離散時間狀態空間之模型。而其離散時間的輸出為

$$y_p(kT) = Cx_p(kT) \quad (12d)$$

這是有趣的當我們將所提的方法和雙線性轉換法作比較。藉由積分式(10a)的兩邊，從 kT 到 $kT+T$ ，得到

$$\begin{aligned} & \int_{kT}^{kT+T} \dot{x}(t) dt \\ &= A \int_{kT}^{kT+T} x(t) dt + B \int_{kT}^{kT+T} u(t) dt \end{aligned} \quad (13)$$

利用片段常數 (piecewise-constant) 近似和梯型積分，式(13)可寫成(下標“ b ”意為是經由雙線性方式)

$$\begin{aligned} & x_b(kT+T) - x_b(kT) \\ &= A \left[\frac{x_b(kT+T) + x_b(kT)}{2} \right] T + B \left[\frac{u(kT+T) + u(kT)}{2} \right] T \end{aligned} \quad (14a)$$

或

$$\begin{aligned} x_b(kT+T) &= \left[I_m - \frac{1}{2} AT \right]^{-1} \left[I_m + \frac{1}{2} AT \right] x_b(kT) \\ &+ \left[I_m - \frac{1}{2} AT \right]^{-1} \frac{BT}{2} [u(kT+T) + u(kT)] \end{aligned} \quad (14b)$$

此即為經由雙線性方式所得到之離散時間狀態空間之模型。而其離散時間的輸出為

$$y_b(kT) = Cx_b(kT) \quad (14c)$$

由式(12c)知當 $n = \infty$ 時，經由所提方式所得到之離散時間狀態空間之模型與經由雙線性方式所得到之結果如式(14b)是相同的。再次顯示雙線性轉換方法只是所提方法的其中一個特例情形。

不管怎樣，式(10a)的精確連續時間解，眾所周知為(其下標“c”意為是連續時間系統)

$$x_c(kT+T) = \exp(AT)x_c(kT) + \int_{kT}^{kT+T} \exp(A(kT+T-\lambda))Bu(\lambda)d\lambda \quad (15a)$$

若輸入信號 $u(\lambda)$ 在積分區間內是一常數值，換言之，即 $u(\lambda) = u(kT)$ 在 $kT \leq \lambda < kT+T$ 時，則式(15a)可得到為

$$x_c(kT+T) = \exp(AT)x_c(kT) + (\exp(AT) - I_m)A^{-1}Bu(kT) \quad (15b)$$

而式(10b)的連續時間輸出為

$$y_c(t = kT) = Cx_c(t = kT) \quad (15c)$$

為了公平的比較離散時間響應 y_d 和原始連續時間響應 y_c ，一個性能指標函數 J 被定義如下

$$J = \int_0^{t_f} (y_c(t) - y_d(t))^2 dt \quad (16)$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{k_f} [y_c(t = kT) - y_d(kT)]^2$$

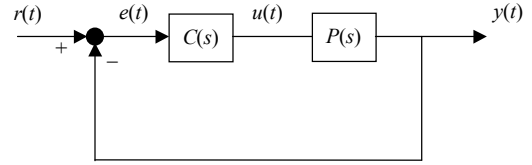
其 $k_f = \text{int}\left(\frac{t_f}{T}\right)$ 是整個響應區段內的最

後一個取樣點，而各誤差合 $J_p(y_d(kT) = y_p(kT))$ 、 $J_b(y_d(kT) = y_b(kT))$ 和 J_B (經由 Boxer-Thaler 轉換關係式)，將在下節更進一步的探討。

四、實例驗證

在本節，將針對所提之轉換法、雙線性轉換法及 Boxer-Thale 轉換法，用一個實例去做離散響應表現的比較。考慮一已完成的受控系統

如圖二



圖二、連續受控系統

其中，參考輸入 $r(t)$ 為一單位步階函數，控制器是

$$C(s) = \frac{s^2 + 10.42s + 20}{s^2 + 32.44s + 20}$$

受控體是

$$P(s) = \frac{20}{s(1 + \frac{s}{10})(1 + \frac{s}{30})}$$

首先，經由雙線性轉換關係式所得之控制器離散等式為

$$C_b(z) = C(s) \Big|_{s = \frac{2z-1}{Tz+1}} = \frac{N_b}{D_b}$$

其

$$N_b = (20T^2 + 20.84T + 4)z^2 + (-8 + 40T^2)z + (20T^2 - 20.84T + 4)$$

$$D_b = (20T^2 + 64.88T + 4)z^2 + (-8 + 40T^2)z + (20T^2 - 64.88T + 4)$$

其次，經由所提方法之轉換關係式所得之控制器離散等式為

$$C_p(z) = C(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{n(z-1)}{[(n+2)z + (n-2)]}} = \frac{N_p}{D_p}$$

其

$$N_p = [4n^2 + 20.84n(n+2)T + 20(n+2)^2T^2]z^2 + [-8n^2 - 83.36nT + 40(n^2 - 4)T^2]z + [4n^2 - 20.84n(n-2)T + 20(n-2)^2T^2]$$

$$D_p = [4n^2 + 64.88n(n+2)T + 20(n+2)^2T^2]z^2 \\ + [-8n^2 - 259.52nT + 40(n^2 - 4)T^2]z \\ + [4n^2 - 64.88n(n-2)T + 20(n-2)^2T^2]$$

最後，經由 Boxer-Thaler 法所得之控制器離散等式如下

因 Boxer-Thaler 轉換關係式之一次方積分子和二次方積分子分別為

$$s^{-1} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

和

$$s^{-2} = \frac{T^2}{12} \frac{z^2 + 10z + 1}{(z-1)^2}$$

而 $C(s)$ 可重寫成

$$C(s) = \frac{1 + 10.42s^{-1} + 20s^{-2}}{1 + 32.44s^{-1} + 20s^{-2}}$$

將 Boxer-Thaler 的 s^{-1} 和 s^{-2} 代入 $C(s)$ 得到

$$C_B(z) = \frac{1 + 10.42 \frac{T(z+1)}{2(z-1)} + 20 \frac{T^2(z^2 + 10z + 1)}{12(z-1)^2}}{1 + 32.44 \frac{T(z+1)}{2(z-1)} + 20 \frac{T^2(z^2 + 10z + 1)}{12(z-1)^2}} \\ = \frac{N_B}{D_B}$$

其

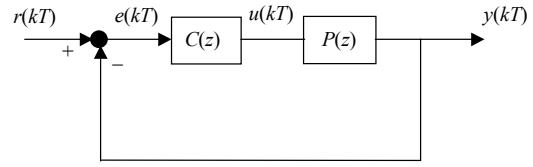
$$N_B = (20T^2 + 62.52T + 12)z^2 + \\ (200T^2 - 24)z + (20T^2 - 62.52T + 12)$$

$$D_B = (20T^2 + 194.64T + 12)z^2 + \\ (200T^2 - 24)z + (20T^2 - 194.64T + 12)$$

使用零階保持(zero-order hold)，得到受控體的離散模型

$$P(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} P(s) \right\}.$$

其整個等效離散受控系統的模式如圖三

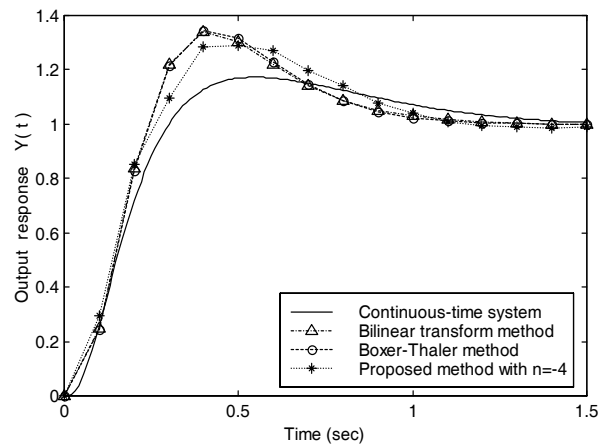


圖三、等效離散受控系統

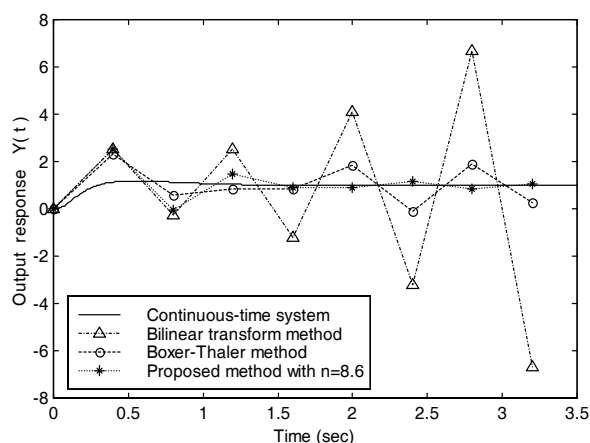
且此離散受控系統的輸出為

$$y(kT) = Z^{-1} \left\{ \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} \cdot R(z) \right\}$$

將 $C_b(z)$ 、 $C_B(z)$ 和 $C_p(z)$ 各自代入 $y(kT)$ ，得到 $y_b(kT)$ 、 $y_B(kT)$ 和 $y_p(kT)$ ，其分別是經由雙線性轉換法、Boxer-Thaler 轉換法及所提轉換法的輸出響應。根據式(16)所定義之性能指標函數，三種輸出誤差和 J_p 、 J_b 和 J_B 將被計算求出以判斷其離散資料系統的表現。所有模擬的結果都被包含在表一，當中有 $(T=0.1, k_f=30)$ 、 $(T=0.15, k_f=20)$ 、 $(T=0.2, k_f=15)$ 、 $(T=0.25, k_f=12)$ 、 $(T=0.3, k_f=10)$ 、 $(T=0.35, k_f=10)$ 、和 $(T=0.4, k_f=8)$ 等八種取樣週期和取樣點數的組合被選取去計算此三種離散方法的誤差和。同時，將 $(T=0.1, k_f=15)$ 和 $(T=0.4, k_f=8)$ 的輸出響應分別顯示於圖四和圖五以便三種離散方法的彼此比較。



圖四、取樣週期 $T=0.1(\text{sec})$ 的輸出響應比較

圖五、取樣週期 $T=0.4(\text{sec})$ 的輸出響應比較

在圖四($T=0.1$)，此三種離散輸出響應是接近的，此外，當一個足夠小的取樣週期(像是 $T=0.01 \text{ sec}$)被使用在此例時，三條離散的反應

曲線近乎是重疊且皆與連續反應曲線非常地接近。另如表一所示，發現當取樣週期遞增時，三種離散誤差指標 J_p 、 J_b 和 J_B 也跟著增加，但遞增的範圍， J_b 是最大， J_B 其次，而選擇一適當 n 值的 J_p 則是最小。而在圖五($T=0.4$)顯示， J_b 已經發散， J_B 和 $J_p(n=8.6)$ 雖皆收斂但

J_B 較 J_p 具有相對較大的誤差值，此結果揭露當

一個適當的補償參數於所提方法中被選取應用時，即可容忍以相對較大的取樣週期去完成資料的取樣。

從上述的模擬結果，顯示所提之方法確實能有效地應用在取樣資料系統的實現上。

表一、不同取樣週期下的誤差和比較

Error \ T	$T = 0.1$	$T = 0.15$	$T = 0.2$	$T = 0.25$	$T = 0.3$	$T = 0.35$	$T = 0.4$
J_p	($n = -4$) 0.0870	($n = -4.9$) 0.1514	($n = -6.8$) 0.2211	($n = -13$) 0.3492	($n = -62$) 0.5620	($n = 22$) 1.1381	($n = 8.6$) 3.5619
J_b	0.1355	0.2411	0.3570	0.4581	0.5802	2.5318	129.99
J_B	0.1396	0.2555	0.4001	0.5692	0.8101	1.5868	5.0863

五、結論

一個藉由調整補償參數的補償型梯型數值積分法在此被討論，其可有效的將類比系統轉換成其等效的離散型式。而事實上，這樣的離散化問題是一種離線的工作，使用者可以根據不同的系統模型和取樣週期，經由事先的模擬，再去決定適合的補償參數值。當一個適當的補償參數被應用時，其離散的模型，不僅會得到一個相對較精確的取樣資料響應，且也能容忍以相對較大之取樣週期去完成資料的取樣。此方法可完全實現於電腦及數位化的程式上。

陸、參考文獻

1 Kuo, B. C., 1995, Digital Control Systems,

Illinois: Champaign (SRL Publishing Company), pp.19-29.

2 Hostetter, G., H., 1994, Digital Control System Design, New York: Hold (Rinehart and Winston), pp. 100-108, 418-447.

3 Ogata, K., 1987, Discrete-Time Control System, Englewood Cliffs (Prentice-Hall), pp.307.

4 Franklin, G. F., Powell, J. D., and Workman, M. L., 1997, Digital Control of Dynamic Systems, California (Addison-Wesley), pp. 135-147.

5 Chen, C. T., 2006, Analog and Digital Control System Design: Transfer-function, State-space, and Algebraic Method, Florida (Saunders College Publishing), pp. 512-528.

- 6 Groutage, F. D., Volfson, L. B., and Schneider, A. M., 1987, S-plane to Z-plane mapping using a simultaneous equation algorithm based on the bilinear transformation. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 32, No. 7, pp. 635-637.
- 7 Wang, C. H., Lin, M. Y., and Teng, C. C., 1990, On the Nature of the Boxer-Thaler and Madwed Integrators and Their Applications in Digitizing a Continuous-Time System. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 35, No. 10, pp. 1163-1167.
- 8 Chen, C. F., and Shieh, L. S., 1970, An algebraic method for control systems design. *International Journal of Control*, Vol. 11, No. 5, pp. 717-739.
- 9 Liu, F. H. and Chen, C. M., 2005, Modified bilinear integration algorithm based on the modulated sine function, *Journal of Systems and Control Engineering (Proceedings of the IMechE, Part D)*, Vol. 219, pp. 609-616.

