

機電系統之動力方程式

Dynamic Equations of Electromechanical Systems

涂德文

Te-Wen Tu

機械工程科副教授

Department of Mechanical Engineering,

Air-Force Institute of Technology

摘要

複雜機電系統耦合設計方興未艾，已成為機械設計之重要分支。然而，欲進行機械和電路耦聯系統之創新設計，如何導出其動力方程式為最基本工作。通常機械系統建立於質點或剛體之力學模式，而電路系統則以電阻、電容及電感為其基本元件，串聯兩者關係之最佳物理觀點應由能量出發。屬於分析動力學範疇之拉格朗日-馬克士威方程式，便是推導機電耦合系統動力方程式之較佳方法。本文，考慮質點模式之機械系統與基本電路系統，重新推導其耦合動力方程式。此外，亦探討機電方程式之對稱性，求出守恆量以增進數值分析之正確性。文末，列舉五個機電系統應用實例，推導其相關動力方程式及相應守恆量。

關鍵字：拉格朗日—馬克士威方程式，機電系統，完整系統，守恆量

Abstract

With the growth of design of complicated electromechanical systems, the coupled design of electrical and mechanical systems have become an important branch in mechanical design. When one performs the innovation design of an electromechanical system, however, how to derive the dynamic equations is the most basic work. In general, the particle or rigid body models are used in a mechanical system, while the resistance, capacity and inductance are three fundamental components of an electrical system, therefore, using energy viewpoint to couple these different systems are the best physical treatment. Moreover, the Lagrange-Maxwell equations are employed to derive these equations in electromechanical systems. In this study, we consider composite systems in which there is dynamic interaction between mechanical and electrical variables. The Lagrange-Maxwell equations are put in order again, and extended to discuss the symmetry and conservative quantities of considered systems. The degrees of freedom of a holonomic electromechanical system is equal to the mesh number of an electrical system. Finally, five examples are provided to demonstrate the derived procedure and their conserved quantities are obtained.

Key Words: Lagrange-Maxwell equation, electromechanical system, holonomic system, conserved quantity

一、前言

現代各種高效率生產設備、大型航空航天運輸載具、高速火車等，全部均耦聯了高度複雜、功能豐富、運行控制能力強大的機電系統。由此可見，現代化生產技術與科技的發展，對機電裝備的功能需求日趨殷切，而高精度、高功效的設計是產生高性能機電裝備的基礎。機械設計必須發展新的設計理論，以增進現代機電整合裝備的創新[1-2]。

一般說來，現代機電系統均由機械、動力、訊息、控制等多個子系統組合而成，透過子系統間的交互作用（也稱為耦合，coupling）產生整體功能；但同時也潛藏著某些狀況，例如當系統處於某種使用環境時，子系統間非設計目標的耦合，可能被激發因而破壞系統進行。此外，由另一觀點，機電系統亦是由機、電、液、光、資訊等多種物理過程融合於載體的複雜物理系統，也是將多種單元技術集成於機電載體，形成特定功能的裝備。裝備運行時，其內部各子系統與環境間進進行著能量、物質與訊息流的多種傳遞、轉換與演變[3-4]。

生活中最常見機電設備屬於能量轉換機組，廣泛存在於旋轉電機、各種機電換能器、磁流體動力變換裝置、高速磁浮列車、高速磁浮軸承等裝置中，約佔社會總動力能源 90% 以上。機電耦聯系統在現代科技發展中已舉足輕重，其動力學問題，因涉及多個學科的基礎理論比較困難，目前仍是工程分析中努力克服的問題。

通常，推導機械系統微分方程式有向量（如牛頓第二運動定律、達倫伯特方程式、凱恩法等）和純量（拉格朗日方程式）兩種方式[5-6]，而推導電路系統微分方程式則常由純量方式（克希荷夫電壓定律、拉格朗日-馬克士威方程式等）出發[7-8]，兩者有所差異。此外，機電分析動力學[9-11] 從能量的觀點出發，研究物體運動在電磁場中發生相互作用的規律，並作為統一的方法，用於

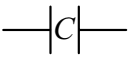
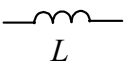
建立力學問題與電路、電磁場問題相耦合的微分方程組，從而去研究機電耦聯的相互作用規律，因此，是研究機電耦聯問題最有效的力學工具。

本文，將機械系統限定於質點模式，將電路系統限定於電阻、電容及電感等基本元件模式，重新推導其耦合動力方程式。此外，為了增進數值分析的正確性，學者進行一系列對稱性與守恆量研究[12-13]，本文亦將其運用至推導機電耦合系統之檢查函數上。

二、拉格朗日-馬克士威方程式

電路是由電源(source)與負載(load)經導線連接組成的，其組成元件常區分為主動元件(active element)及被動元件(passive element)兩大類。主動元件提供電能，歸納為電壓源及電流源兩種，而被動元件則消耗電能，包括電阻 R 、電容 C 及電感 L 等三種，表一列舉其電路符號表示及兩端之電壓公式[14]。

表一 RCL 之符號與兩端電壓

元 件 名 稱/ 單 位	符 號 表 示	兩 端 之 電 壓 (V, i : 電 壓、電 流)
電 阻 (歐 姆 Ω)		$V = iR$
電 容 (法 拉 F)		$V = \frac{1}{C} \int i dt$
電 感 (亨 利 H)		$V = L \frac{di}{dt}$

在一般電路分析中，除了利用歐姆定律 (Ohm's law) 外，還有德國物理學家克希荷夫建立的電流定律和電壓定律：

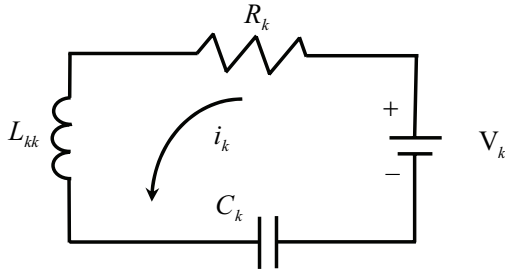
- (1) 電流定律(current law)：在電路中，任意時刻，任一節點(node)的淨電流等於零，亦即流入節點的電流等於流出節點的電流。
(電荷守恆)

(2) 電壓定律(voltage law)：在電路中，任意時刻，任一封閉迴路(loop)的淨電壓等於零，亦即封閉迴路的電壓降等於電壓升。

(能量守恆)

2.1 電路方程式

考慮由 m 個迴路構成的電網絡(electric networks)系統，如圖一僅表示出第 $k(k=1, 2, \dots, m)$ 個 RLC 迴路。此時 i_k 表通過第 k 個迴路的電流； V_k 表作用於第 k 個迴路的外加電動勢； e_k 表電容器的電荷，它和電流的關係式為 $\dot{e}_k = i_k$ ； R_k 表電阻； C_k 為電容器的電容； L_{kk} 為電感器之電感。



圖一 第 k 個 RLC 迴路

若 e_k 為圖一所示電容器一個極板上的電荷量，而 V_k^e 為電容器兩極板間的電動勢差，則電容器的電容 C_k 可為

$$C_k = \frac{e_k}{V_k^e} \quad (1)$$

。值得注意的是，當欲探討機電系統的物體之相互位置會變化情況下，電容器極板間的距離亦會隨之變化；此時電容 C_k 將是廣義坐標 $q_s (s=1, \dots, n)$ 的函數，亦即

$$C_k = C_k(\mathbf{q}) \quad (2)$$

式中， $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ 。而電容器兩極板間的電場能量可如下表示：

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{e_k^2}{C_k} \quad (3)$$

由式(1)及(3)可知，第 k 個電容器極板間的電壓 V_k^e 為

$$V_k^e = \frac{\partial W_e}{\partial e_k} = \frac{e_k}{C_k} \quad (4)$$

假定帶電導體位於均勻的各向同性非鐵磁介質中，由 m 個帶電迴路所組成系統之磁場能量為

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m L_{kr} i_k i_r \quad (5)$$

式中， L_{kk} 為第 k 個迴路的自感(self-inductance)， $L_{kr} (k \neq r)$ 為第 k 個與第 r 個迴路的互感(mutual-inductance)。電感 L_{kr} 的大小依賴於第 k 個與第 r 個迴路的尺寸和形式、兩線圈間的距離及相互位置的分布以及介質的磁導率。因此， L_{kr} 是廣義坐標 $q_s (s=1, \dots, n)$ 的函數，即

$$L_{kr} = L_{kr}(\mathbf{q}) \quad (6)$$

通過第 k 個迴路的磁鏈(magnetic linkage) ϕ_k 和系統各迴路的電流成正比，可表為

$$\phi_k = \sum_{r=1}^m L_{kr} i_r \quad (7)$$

比較式(5)及式(7)，磁鏈 ϕ_k 可寫成

$$\phi_k = \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \quad (8)$$

若以 V_k^i 表示磁鏈 ϕ_k 變化時在第 k 個迴路中產生的感應電動勢，按法拉第電磁感應定律，其感應電動勢為

$$V_k^i = -\frac{d\phi_k}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) \quad (9)$$

由克希荷夫電壓定律得知，第 k 個迴路的感應電動勢與外加電動勢的和，等於電阻

器及電容器之電壓降和，亦即

$$V_k + V_k^i = R_k i_k + V_k^e \quad (10)$$

以(4)及(9)二式代入上式即得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) + \frac{\partial W_e}{\partial e_k} + R_k i_k = V_k \quad (11)$$

($k=1, 2, \dots, m$)

接著，引進電路的耗散函數(dissipate function)如下：

$$F_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m R_k i_k^2 \quad (12)$$

此時式(11)可改寫為

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) + \frac{\partial W_e}{\partial e_k} + \frac{\partial F_e}{\partial i_k} = V_k \quad (13)$$

($k=1, 2, \dots, m$)

2.2 有質動力

當電場、磁場作用在有質量的物體上時，其所產生的力稱為有質動力。和廣義坐標 $q_s (s=1, \dots, n)$ 相對應，以 $P_s^* (s=1, \dots, n)$

表示廣義有質動力。

為了求得准穩態(quasi-steady state)系統之廣義有質動力表達式，需要先建立系統的能量平衡方程式。由於外加電動勢所作的功，包括焦耳熱、電磁場能量的改變以及有質動力所作的功，因而功率平衡方程式應為

$$\sum_{k=1}^m V_k i_k = \sum_{k=1}^m R_k i_k^2 + \frac{dW_m}{dt} + \frac{dW_e}{dt} + \sum_{s=1}^n P_s^* \dot{q}_s \quad (14)$$

式中， $\dot{q}_s$ 為廣義速率， $\sum_{s=1}^n P_s^* \dot{q}_s$ 為有質動力

的功率。

由式(5)和式(6)得知， W_m 為電流 $i_k (k=1, \dots, m)$ 和廣義坐標 $q_s (s=1, \dots, n)$ 的函數，故

$$\frac{dW_m}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \frac{di_k}{dt} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial q_s} \dot{q}_s \quad (15)$$

經過變換推導可得

$$\frac{dW_m}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) i_k - \sum_{s=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial q_s} \dot{q}_s \quad (16)$$

同理，系統的電能 W_e 為電荷 $e_k (k=1, \dots, m)$ 和廣義坐標 $q_s (s=1, \dots, n)$ 的函數，即 $W_e = W_e(e_k, q_s)$ ，可推導得

$$\frac{dW_e}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_e}{\partial e_k} \dot{e}_k + \sum_{s=1}^n \frac{\partial W_e}{\partial q_s} \dot{q}_s \quad (17)$$

將式(16)、(17)代入功率平衡方程式(14)中即得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \left[V_k - R_k i_k - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) - \frac{\partial W_e}{\partial e_k} \right] i_k \\ &= \sum_{s=1}^n \left(-\frac{\partial W_m}{\partial q_s} + \frac{\partial W_e}{\partial q_s} + P_s^* \right) \dot{q}_s \end{aligned} \quad (18)$$

代入(11)式之電路方程式於上式等號左邊即得

$$P_s^* = \frac{\partial W_m}{\partial q_s} - \frac{\partial W_e}{\partial q_s} = \frac{\partial}{\partial q_s} (W_m - W_e) \quad (19)$$

再將式(3)及式(5)代入上式得

$$P_s^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m \frac{\partial L_{kr}}{\partial q_s} i_k i_r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\partial C_k}{\partial q_s} \frac{e_k^2}{C_k^2} \quad (20)$$

2.3 拉格朗日-馬克士威方程式

1873 年馬克士威(Maxwell)在他的電與磁的論文中，應用拉格朗日(Lagrange)方法，第一次描述了機電系統的問題，後人稱所得的方程為拉格朗日-馬克士威方程式。

若以 T 表示系統的動能(Kinetic energy)，則在穩定約束的情況下，它是廣義速率的齊性二次型。

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \quad (21)$$

式中， a_{rs} 是與廣義坐標 $q_s (s=1, \dots, n)$ 有關的慣性係數(inertia coefficient)。

機電系統之機械部分位能(potential

energy) 為廣義坐標的函數，可表為

$$\Pi = \Pi(\mathbf{q}) \quad (22)$$

又表示粘性摩擦阻尼力的耗散函數為

$$F_m = F_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (23)$$

式中， $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ 。今若考慮到在機

械系統中，除了有勢力 $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}$ 、 $-\frac{\partial F_m}{\partial \dot{q}_s}$ 、非

保守力的廣義力 P_s 之外，還作用著有質動力 P_s^* 。則拉格朗日方程式可寫成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s} - \frac{\partial F_m}{\partial \dot{q}_s} + P_s + P_s^* \quad (s=1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

今將式(20)代入上式，對於欲探究的機電系統，可以把電路方程式(13)及機械方程式(24)寫成如下封閉方程組

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) + \frac{\partial W_e}{\partial e_k} + \frac{\partial F_e}{\partial i_k} = V_k \\ (k=1, 2, \dots, m) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} - \frac{\partial W_m}{\partial q_s} \\ + \frac{\partial W_e}{\partial q_s} + \frac{\partial F_m}{\partial \dot{q}_s} = P_s \quad (s=1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (25)$$

其次，若引進機電系統的拉格朗日函數 (Lagrangian) $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 為

$$L = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \Pi(\mathbf{q}) + W_m(\mathbf{q}, i_k) - W_e(\mathbf{q}, e_k) \quad (26)$$

以及機電系統的耗散函數為

$$F = F_e(i_k) + F_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (27)$$

即得到機電系統的拉格朗日-馬克士威方程組為

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial e_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{e}_k} = V_k \\ (k=1, 2, \dots, m) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} = P_s \\ (s=1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (28)$$

共有 $n+m$ 個二階常微分方程組，它們分別對電荷 $e_1, e_2, \dots, e_m$ 及廣義坐標 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 取偏導數。

為了求解方程式(28)，需要給定電荷、電流、廣義坐標及廣義速率之 $2(n+m)$ 個初始條件，亦即

$$\begin{aligned} e_k|_{t=0} &= e_k^0, & i_k|_{t=0} &= i_k^0 \\ q_s|_{t=0} &= q_s^0, & \dot{q}_s|_{t=0} &= \dot{q}_s^0 \end{aligned} \quad (29)$$

三、機械系統與電路系統之類比

若將電路系統基本元件電阻、電容及電感（電流 i 和電壓 V ），若與機械系統之質量、阻尼及彈簧（速度 v 和力 F ）作力-電壓類比，則其相對應關係如表二所示：

表二 機械系統與電路系統之類比

機 械 系 統	電 路 系 統
質量 m	電感 L
阻尼 b	電阻 R
彈簧常數 k	$1/C$ (C : 電容)
速度 v	電流 i
力量 F	電壓 V

由式(28)之拉格朗日-馬克士威方程組可見，若把第一式中的 e_k 選作廣義坐標

q_s ， $\dot{e}_k (= i_k)$ 選作廣義速率 $\dot{q}_s$ ， $V_k - \frac{\partial F}{\partial \dot{e}_k}$ 、

$P_s - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s}$ 選作為廣義力 Q_s ，則式(28)的第

一、第二兩式就變成如下之一個統一的式子。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s \quad (s=1, 2, \dots, \nu) \quad (30)$$

其中， $\nu = n+m$ 。拉格朗日函數 $L = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 如式(26)， $Q_s = Q_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 為非保守力之廣義力。

四、機電系統之對稱性與守恒量

為了確保動力方程式作數值分析時不會發生一些情況，諸如公式推導錯誤、方程式正確但程式撰寫失誤、數值積分程序有誤等，因此，各種守恒量 (conserved quantity；亦稱檢查函數，checking function) 廣被研究者重視[5, 13]。底下探討屬於廣義坐標下一般完整機電系統的 Noether 對稱性與守恒量。

4.1 Noether 對稱性

假設具有雙面理想完整約束的機電系統的位形(configuration)，係由 ν 個廣義坐標 $q_s (s=1, \dots, \nu)$ 來確定，其運動方程式如式 (30)。

若取時間 t 和坐標的群的無限小變換為

$$t^* = t + \Delta t, \quad q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (31)$$

或其展開式

$$t^* = t + \varepsilon \xi_0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (32)$$

$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (33)$$

其中， ε 為無限小參數， $\xi_0, \xi_s (s=1, 2, \dots, \nu)$ 為無限小生成元。

Noether 對稱性理論[13]指出，如果存在規範函數(gauge function)

$G_N = G_N(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 使無限小生成元 ξ_0, ξ_s 滿足 Noether 等式

$$L \dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \sum_{s=1}^{\nu} Q_s (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \dot{G}_N = 0 \quad (34)$$

其中，

$$X^{(1)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{\nu} [\xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}] \quad (35)$$

則這種不變性(invariant)稱為一般完整系統的 Noether 對稱性。

4.2 Noether 守恒量

如果無限小變換的生成元 ξ_0, ξ_s 滿足式 (34)，則一般完整系統的 Noether 對稱性可直接導得如下之 Noether 守恒量[13]

$$I_N = L \xi_0 + \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + G_N = \text{const} \quad (36)$$

這個理論的優勢在於，有一個 Noether 對稱性，就可找到與之對應的一個守恒量。

五、實例分析

如前述已得機電系統之運動方程式及其相應守恒量，底下提出推導之具體步驟：

(1) 選擇單值確定機械系統物體位置的廣義坐標 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 和電容器的電荷 $e_1, e_2, \dots, e_m$ ；如果在系統中沒有電容器，則引入系統的迴路電流 $i_1, i_2, \dots, i_m$ 。

(2) 計算系統的動能 T 、位能 π 、磁能 W_m 及電能 W_e ，按式 (26) 建立機電系統的拉格朗日函數 L 。

(3) 利用虛功原理(principle of virtual work)

求廣義非保守力 $Q_s = Q_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 的表達式。機械系統非保守力的功率表達式中，廣義速率前的係數即為廣義非保守力。

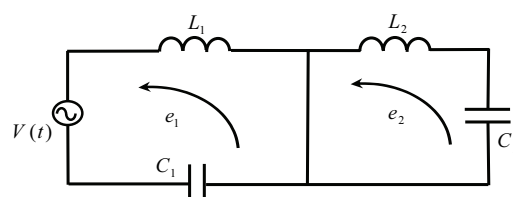
(4) 對拉格朗日函數進行微分運算，依式 (30) 建立方程組。

(5) 推導機電系統之 Noether 對稱性公式與各守恒量公式。

底下舉了五個機電系統應用實例，推導所需之方程式及其守恒量。

[實例一]：

考慮如圖二所示之雙網絡簡單電路系統 [10]，已知交流電壓源 $V(t) = V_0 \sin \omega t$ ，試推導其方程式。



圖二 雙網絡電路系統

[解]：本系統為雙自由度之非保守系統，它可分解為二個獨立的單迴路來研究。今取 e_1 及 e_2 為廣義坐標，則磁能 W_m 及電能 W_e 分別為

$$W_m = \frac{1}{2}L_1\dot{e}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{e}_2^2 \quad (37)$$

$$W_e = \frac{e_1^2}{2C_1} + \frac{e_2^2}{2C_2} \quad (38)$$

此時拉格朗日函數為

$$\begin{aligned} L &= W_m(\dot{e}_1, \dot{e}_2) - W_e(e_1, e_2) \\ &= \frac{1}{2}L_1\dot{e}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{e}_2^2 - \frac{e_1^2}{2C_1} - \frac{e_2^2}{2C_2} \end{aligned} \quad (39)$$

利用虛功原理求系統廣義非保守力得

$$Q_1 = V(t), \quad Q_2 = 0 \quad (40)$$

代入拉格朗日-馬克士威方程式(式(30))，可列出二個單迴路方程式為

$$\begin{cases} L_1\ddot{e}_1 + \frac{1}{C_1}e_1 = V \\ L_2\ddot{e}_2 + \frac{1}{C_2}e_2 = 0 \end{cases} \quad (41)$$

本例之 Noether 對稱式為

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + V(t)(\xi_1 - \dot{e}_1\xi_0) + \dot{G}_N = 0 \quad (42)$$

其中，

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial e_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial e_2} \\ &+ (\dot{\xi}_1 - \dot{e}_1\xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{e}_1} + (\dot{\xi}_2 - \dot{e}_2\xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{e}_2} \end{aligned} \quad (43)$$

此時以式(43)代入式(42)即得

$$\begin{aligned} & -\left[\frac{1}{2}(L_1\dot{e}_1^2 + L_2\dot{e}_2^2 + \frac{e_1^2}{C_1} + \frac{e_2^2}{C_2})\dot{\xi}_0 + V(t)\dot{e}_1\xi_0\right] \\ & + [L_1\dot{e}_1\dot{\xi}_1 + (V - \frac{e_1}{C_1})\xi_1] + (L_2\dot{e}_2\dot{\xi}_2 - \frac{e_2}{C_2}\xi_2) \\ & + \dot{G}_N = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

可找到滿足解如下：

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1, G_N = -\frac{e_2}{C_2}t \quad (45)$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0, G_N = \frac{V_0}{\omega}\cos\omega t - \frac{e_1}{C_1}t \quad (46)$$

再代入如下 Noether 守恆量求得檢查函數

$$\begin{aligned} I_N &= L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{e}_1}(\xi_1 - \dot{e}_1\xi_0) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial \dot{e}_2}(\xi_2 - \dot{e}_2\xi_0) + G_N = \text{const} \end{aligned} \quad (47)$$

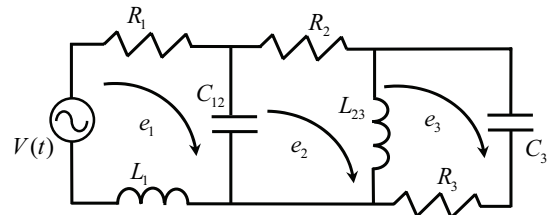
即得如下兩守恆量

$$I_{N1} = L_2\dot{e}_2 - \frac{e_2}{C_2}t \quad (48)$$

$$I_{N2} = L_1\dot{e}_1 - \frac{e_1}{C_1}t + \frac{V_0}{\omega}\cos\omega t \quad (49)$$

[實例二]：

考慮如圖三所示三網絡簡單電路系統，試推導其方程式（注意 L_{23} 是自感而非互感）。



圖三 三網絡電路系統

[解]：

本系統為三自由度非保守系統，它可分解為三個獨立的單迴路來研究。今取 e_1 、 e_2 及 e_3 為系統之廣義坐標，則磁能 W_m 及電能 W_e 分別為

$$W_m = \frac{1}{2}L_1\dot{e}_1^2 + \frac{1}{2}L_{23}\dot{e}_2^2 + \frac{1}{2}L_{23}\dot{e}_3^2 - L_{23}\dot{e}_2\dot{e}_3 \quad (50)$$

$$W_e = \frac{e_3^2}{2C_3} + \frac{e_1^2}{2C_{12}} + \frac{e_2^2}{2C_{12}} - \frac{e_1e_2}{C_{12}} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
 L &= W_m(\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3) - W_e(e_1, e_2, e_3) \\
 &= \frac{1}{2}L_1\dot{e}_1^2 + \frac{1}{2}L_{23}\dot{e}_2^2 + \frac{1}{2}L_{23}\dot{e}_3^2 - L_{23}\dot{e}_2\dot{e}_3 \quad (52) \\
 &\quad - \frac{e_3^2}{2C_3} - \frac{e_1^2}{2C_{12}} - \frac{e_2^2}{2C_{12}} + \frac{e_1e_2}{C_{12}}
 \end{aligned}$$

利用虛功原理，此時系統之廣義非保守力為
 $Q_1 = V(t) - R_1\dot{e}_1$, $Q_2 = -R_2\dot{e}_2$, $Q_3 = -R_3\dot{e}_3$ (53)

代入拉格朗日-馬克士威方程組，可列出三個單迴路方程式為

$$\begin{cases}
 L_1\ddot{e}_1 + R_1\dot{e}_1 + \frac{1}{C_{12}}e_1 - \frac{1}{C_{12}}e_2 = V \\
 L_{23}\ddot{e}_2 - L_{23}\ddot{e}_3 + R_2\dot{e}_2 + \frac{1}{C_{12}}e_2 - \frac{1}{C_{12}}e_1 = 0 \\
 L_{23}\ddot{e}_3 - L_{23}\ddot{e}_2 + R_3\dot{e}_3 + \frac{1}{C_3}e_3 = 0
 \end{cases} \quad (54)$$

注意， $\dot{e}_s = i_s (s=1, 2, 3)$ 。本例之 Noether 對稱式為

$$\begin{aligned}
 &L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + Q_1(\xi_1 - \dot{e}_1\xi_0) \\
 &+ Q_2(\xi_2 - \dot{e}_2\xi_0) + Q_3(\xi_3 - \dot{e}_3\xi_0) + \dot{G}_N = 0 \quad (55)
 \end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
 X^{(1)} &= \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial e_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial e_2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial e_3} \\
 &+ (\xi_1 - \dot{e}_1\xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{e}_1} + (\xi_2 - \dot{e}_2\xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{e}_2} \\
 &+ (\xi_3 - \dot{e}_3\xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{e}_3} \quad (56)
 \end{aligned}$$

以式(56)代入式(55)可得

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \left[-\frac{1}{2}(L_1\dot{e}_1^2 + L_{23}\dot{e}_2^2 + L_{23}\dot{e}_3^2) + L_{23}\dot{e}_2\dot{e}_3 - \frac{e_3^2}{2C_3} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{e_1^2}{2C_{12}} - \frac{e_2^2}{2C_{12}} + \frac{e_1e_2}{C_{12}} \right] \dot{\xi}_0 + [-V(t)\dot{e}_1 + R_1\dot{e}_1^2 \right. \\
 &\quad \left. + R_2\dot{e}_2^2 + R_3\dot{e}_3^2 \right] \xi_0 \} + \{ L_1\dot{e}_1\dot{\xi}_1 + [V(t) - \frac{e_1}{C_{12}} + \\
 &\quad \frac{e_2}{C_{12}} - R_1\dot{e}_1] \dot{\xi}_1 \} + [(L_{23}\dot{e}_2 - L_{23}\dot{e}_3) \dot{\xi}_2 \\
 &\quad + (-\frac{e_2}{C_{12}} + \frac{e_1}{C_{12}} - R_2\dot{e}_2) \dot{\xi}_2] + [(L_{23}\dot{e}_3 - L_{23}\dot{e}_2) \dot{\xi}_3 \\
 &\quad + (-\frac{e_3}{C_3} - R_3\dot{e}_3) \dot{\xi}_3] + \dot{G}_N = 0 \quad (57)
 \end{aligned}$$

可找到如下滿足解

$$\begin{aligned}
 &\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1, \xi_3 = 0, \\
 &G_N = -\frac{e_2 - e_1}{C_{12}}t - R_2e_2 \quad (58)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1, \\
 &G_N = -\frac{e_3}{C_3}t - R_3e_3 \quad (59)
 \end{aligned}$$

再代入如下 Noether 守恆量

$$\begin{aligned}
 I_N &= L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{e}_1}(\xi_1 - \dot{e}_1\xi_0) \\
 &+ \frac{\partial L}{\partial \dot{e}_2}(\xi_2 - \dot{e}_2\xi_0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{e}_3}(\xi_3 - \dot{e}_3\xi_0) \\
 &+ G_N = const \quad (60)
 \end{aligned}$$

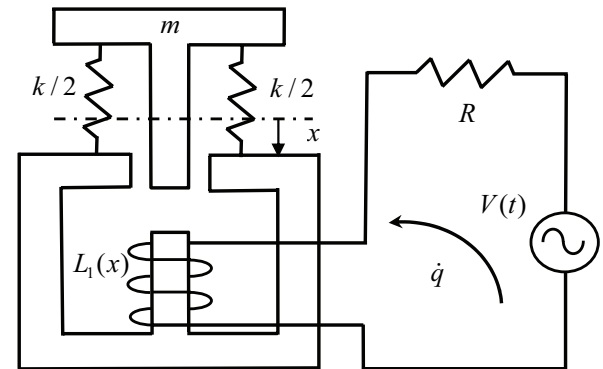
即可求得檢查函數如下：

$$I_{N1} = L_{23}\dot{e}_2 - L_{23}\dot{e}_3 - \frac{e_2 - e_1}{C_{12}}t - R_2e_2 \quad (61)$$

$$I_{N2} = L_{23}\dot{e}_3 - L_{23}\dot{e}_2 - \frac{e_3}{C_3}t - R_3e_3 \quad (62)$$

[實例三]：

考慮如圖四所示為記錄機械振動的電動傳感器的電路系統，已知電樞的質量為 m ，彈簧的總剛度為 k ，線圈的自感為 $L_1 = L_1(x)$ 。式中， x 為自彈簧原長位置算起的鉛垂位移，線圈與交流電動勢 $V(t)$ 及電阻 R 連成電路系統，試求出此耦合系統的運動微分方程式。[9]



圖四 電動傳感器的電路系統

[解]：系統的機械部分和電路部分各具有一個自由度，故為雙自由度非保守機電系統。今若選取電極位移 x 和電量 q 為廣義坐標，則此時拉格朗日函數為

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L_1(x)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + mgx \quad (63)$$

利用虛功原理求系統廣義非保守力得

$$Q_1 = V(t) - R\dot{q}, \quad Q_2 = 0 \quad (64)$$

代入拉格朗日—馬克士威方程式中即得運動方程式為

$$\begin{cases} L_1\ddot{q} + R\dot{q} + \dot{q}\frac{dL_1}{dx} = V(t) \\ m\ddot{x} - \frac{1}{2}\frac{dL_1}{dx}\dot{q}^2 + kx = mg \end{cases} \quad (65)$$

本例之 Noether 對稱式為

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + Q_1(\xi_1 - \dot{x}\xi_0) + \dot{G}_N = 0 \quad (66)$$

其中，

$$\begin{aligned} X^{(1)} = & \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial q} \\ & + (\xi_1 - \dot{x}\xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + (\xi_2 - \dot{q}\xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \end{aligned} \quad (67)$$

以式(67)代入式(66)得

$$\begin{aligned} & \{(-\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{L_1(x)}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + mgx)\xi_0 \\ & + [-V(t)\dot{x} + R\dot{q}\dot{x}]\xi_0\} + [m\dot{x}\xi_1 \\ & + (\frac{1}{2}\frac{dL_1(x)}{dx}\dot{q}^2 - kx + mg + V(t) \\ & - R\dot{q})\xi_1] + L_1(x)\dot{q}\xi_2 + \dot{G}_N = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

可找到如下滿足解

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = t, G_N = -L_1(x)q \quad (69)$$

再代入 Noether 守恆量公式求得檢查函數

$$I_N = L_1(x)\dot{q}t - L_1(x)q \quad (70)$$

[實例四]：

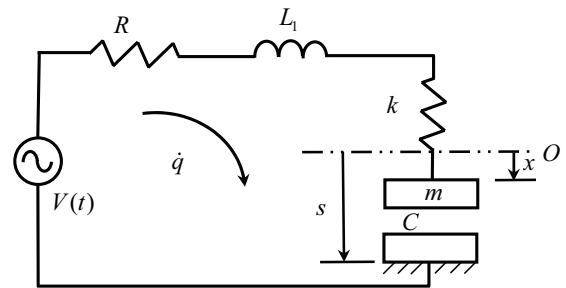
考慮如圖五所示電容為 C 之電容器，

其中質量為 m 之上板極被懸掛在剛度係數為 k 的彈簧上，上板極在重力、彈力和板極間的電場力作用下，沿鉛垂方向作自由振動。已知電容 $C = \frac{A}{s-x}$ ，其中 A 為常數， s

為距離；電路中還存在有電感 L_1 、電阻 R

以及電動勢為 $V(t) = V_0 \sin \omega t$ 的交流電源，

試求出此系統的運動方程式。[9]



圖五 電容器-彈簧系統

[解]：系統為具有兩個自由度之非保守機電系統，今以電容器活動極板的平衡位置 O 點為坐標原點，並選坐標 x 和電量 q 為廣義坐標。此時拉格朗日函數為

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L_1\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{s-x}{2A}q^2 \quad (71)$$

非保守力所作虛功為

$$\delta A = V(t)\delta q = V_0 \sin \omega t \delta q \quad (72)$$

故非保守力的廣義力為

$$Q_1 = V(t) = V_0 \sin \omega t, \quad Q_2 = 0 \quad (73)$$

代入拉格朗日—馬克士威方程組中即得運動方程式為

$$\begin{cases} L_1\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{A}(s-x)q = V_0 \sin \omega t \\ m\ddot{x} + kx - \frac{1}{2A}q^2 = 0 \end{cases} \quad (74)$$

本例之 Noether 對稱式為

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + Q_1(\xi_1 - \dot{x}\xi_0) + \dot{G}_N = 0 \quad (75)$$

其中，

$$X^{(1)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial q} + (\dot{\xi}_1 - \dot{x}\xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + (\dot{\xi}_2 - \dot{q}\xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \quad (76)$$

以式(76)代入式(75)得

$$\begin{aligned} & \{(-\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{L_1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{s-x}{2A}q^2)\dot{\xi}_0 \\ & + [-V(t)\dot{x}]\dot{\xi}_1\} + [m\dot{x}\dot{\xi}_1 + (\frac{q^2}{2A} - kx \\ & + V(t))\dot{\xi}_1] + (L_1\dot{q}\dot{\xi}_2 - \frac{s-x}{A}q\dot{\xi}_2) \\ & + \dot{G}_N = 0 \end{aligned} \quad (77)$$

可找到如下滿足解

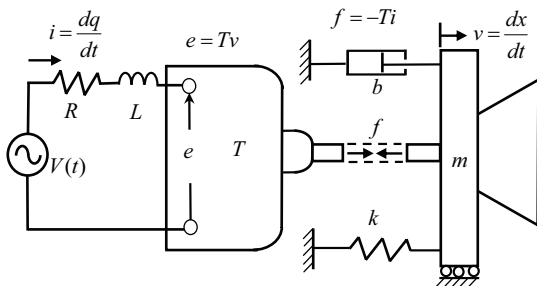
$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = t, G_N = -L_1q - \frac{s-x}{2A}qt^2 \quad (78)$$

再代入 Noether 守恆量公式求得檢查函數

$$I_N = L_1\dot{q}t - L_1q - \frac{s-x}{2A}qt^2 \quad (79)$$

[實例五]：

考慮如圖六所示為永磁(permanent-magnet)擴音器模型。真實擴音器其聲音線圈固著於紙圓柱上。在目前假設低頻模型，則將聲音線圈與圓柱組合，模擬成如圖六所示理想化移動式線圈轉換器(transducer)系統，其中， T 表轉換器常數(單位：牛頓/安培)，試求出系統的運動方程式。[6]



圖六 擴音器機電系統

[解]：系統為具有兩個自由度之非保守系統，今以電容器活動板的平衡位置 O 點為坐標原點，選坐標 x 和電量 q 為廣義坐標。此時

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + T\dot{q}(x - x_0) \quad (80)$$

其中， x_0 表彈簧原長。此時非保守力所作虛功為

$$\delta A = [V(t) - R\dot{q}]\delta q + (-b\dot{x})\delta x \quad (81)$$

故屬於非保守力的廣義力為

$$Q_1 = V(t), \quad Q_2 = 0 \quad (82)$$

代入拉格朗日—馬克士威方程中即得運動方程式為

$$\begin{cases} L\ddot{q} + T\dot{x} + Ri = V(t) \\ m\ddot{x} + b\dot{x} + kx - Ti = 0 \end{cases} \quad (83)$$

仿實例三作法得本例之 Noether 對稱式結果為

$$\begin{aligned} & \{[-\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{L}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \dot{q}T(x - x_0)]\dot{\xi}_0 \\ & + [-V(t)\dot{x}]\dot{\xi}_1\} + \{m\dot{x}\dot{\xi}_1 + [-kx + T\dot{q} \\ & + V(t)]\dot{\xi}_1\} + [L\dot{q} - T(x - x_0)]\dot{\xi}_2 + \dot{G}_N = 0 \end{aligned} \quad (84)$$

可找到如下滿足解

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = t, \\ G_N &= -Lq + T(x - x_0)t \end{aligned} \quad (85)$$

再代入 Noether 守恆量公式求得檢查函數為

$$I_N = [L\dot{q} + 2T(x - x_0)]t - Lq \quad (86)$$

五、討論

綜合前述結果，下列四點值得注意：

1. 電路學中的結點(node)方程與力學中的約束(constraint)方程式亦成比擬關係。由於電網絡中每一個支路(branch)所流動的電量和力學系統中質點的坐標一樣，故有可能受到一定的條件限制。由於各支路中的電量並非相互獨立，必須滿足克希荷夫電流定律。其導得之結點方程式都是可積分(integrable)的運動拘束式，故為屬於完整(holonomic)拘束。也因此電路系統的迴路數目，可代表完整系統的自由度數

目，如實例一與實例二。

2. 凱恩法(Kane's method)[5]利用偏速度(partial velocity)與牛頓第二運動定律方程式內積的方式求解機械系統問題，具有直接得到一階運動方程及線性化之優點。然而當應用到求解電路系統時，將面臨無法找出相應偏速度之向量，以致於如何推展到電路系統仍待突破。
3. 如實例二產生方程式耦合問題[式(54)]，該如何去耦合值得後續再深入探究。
4. 執行穩定性探討[12]或作控制器設計[15]，如何快速將方程式線性化亦是未來可深究問題。

六、結論

本研究探討機電耦合系統之拉格朗日—馬克士威方程式。機械系統採用質量-阻尼-彈簧元件，電路系統則採用電感-電阻-電容元件，同時由能量觀點考量兩系統，可容易推導得相關之運動方程式。此外，本文透過 Noether 對稱性以導出機電系統相關守恒量，利於數值分析時應用。

七、參考文獻

1. 李瑞琴著：“機電一體化系統創新設計”，科學出版社，(2005)。
2. 鍾掘等編著：“複雜機電系統耦合設計理論與方法”，機械工業出版社，(2007)。
3. 大熊繁著，旭烈編譯：“機器人控制入門”，復文書局，§2-5 微分要素，pp. 28-36，(1986)。
4. 陳以撒編著，“機電整合”，全華科技圖書，(2001)。
5. T. R. Kane and D. A. Levinson, ‘Dynamics : Theory and Applications’, McGraw-Hill Inc., (1985).
6. Crandall, S. H., Karnopp, D. C., Kurtz, E. F., Jr., Pridmore-Brown, D. C., “Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems,” Chapters 5 and 6, pp. 410 - 416, McGraw-Hill Book Company , (1968).
7. 尹真，“電動力學”（第二版），科學出版社，(2006)。
8. J. W. Nilsson and S. A. Riedel, “Electric Circuits”，中譯本（劉濱達及陳在注編譯），第七章”RLC 電路的自然響應與階波響應”，第 303~348 頁，東華書局，(1998)。
9. 邱家俊編著，“機電分析動力學”，第三篇機電系統分析動力學，pp. 308-331，科學出版社，(1992)。
10. Lysherski, S. E., “Nano- and Microelectromechanical Systems --- Fundamentals of Nano- and Microengineering, CRC Press LLC, London, U.K., (2001)
11. 徐銘陶，肖明葵編著：“工程動力學——振動與控制”，§2.9 機電耦合系統動力學，pp. 105-116，機械工業出版社，(2004)。
12. 梅鳳翔，史榮昌，張永發，朱海平著，“約束力學系統的運動穩定性”，第三章”完整約束力學系統的運動穩定性”，pp. 68-97，北京理工大學出版社，(1997)。
13. 梅鳳翔著，“約束力學系統的對稱性與守恒量”，第三章”廣義坐標下一般完整系統的對稱性與守恒量”，pp. 63-94，北京理工大學出版社，(2004)。
14. 陳朝光、陳介力、楊錫凱編著：“自動控制”，§2-1-3 電路系統，pp. 38-42，高立圖書有限公司，(2004)。
15. 高鍾毓編著：“機電控制工程”，§1.2 典型機電控制系統，pp. 4-9 清華大學出版社，(2002)。