

撓性連桿含裂縫之速回機構的動態分析

Dynamic Analysis of Quick-Return Mechanism with a Crack in the Flexible Linkage

黃俊榮¹, 崔兆崇², 馮榮豐³, 陳呂鳴², 周玉端⁴

Chun-Jung Huang¹, Siu-Tong Choi², Rong-Fong Fung³, Lu-Ming Chen², Yu-Tuan Chou⁴

¹ 空軍航空技術學院飛機工程系

² 成功大學航空太空工程學系

³ 高雄第一科技大學機械與自動化工程系

⁴ 永達技術學院機械工程系

¹Department of Aircraft Engineering, Air Force Institute of Technology

²Department of Aeronautics and Astronautics, National Cheng Kung University

³Department of Mechanical & Automation Engineering, National Kaohsiung First University of Science and Technology

⁴Department of Mechanical Engineering, Yung Ta Institute of Technology

摘要

本文以有限元素法來分析連桿含裂縫之速回機構的動態行為。撓性連桿以 Timoshenko 樑來模擬，即考慮連桿的旋轉慣性以及剪應變效應；考慮曲柄為剛體，且以定轉速旋轉帶動撓性連桿。撓性連桿上的裂縫假設為開啟狀態的橫向裂縫，並利用裂縫之應力強度因子及卡氏定理推導出含裂縫元素的局部柔度矩陣。本文以有限元素法和 Lagrange 方程式推導系統的運動方程式，並以 Runge-Kutta 數值積分方法求解系統的動態響應，探討當撓性連桿上的裂縫位置不同和裂縫深度不同時，對系統之動態響應的影響。數值結果顯示，裂縫位置越靠近平移旋轉套筒處，連桿端點位移之動態響應的振幅越大。另外裂縫的深度越大，系統動態響應的振幅也越大。

關鍵字：撓性連桿、裂縫、速回機構。

Abstract

Dynamic response of a quick-return mechanism with a crack in the flexible linkage is investigated in this thesis. The flexible linkage of the system is modeled as a Timoshenko beam, which includes the effects of rotary inertia and shear deformation. The rigid crank drives the flexible linkage at a constant angular speed. The crack in the flexible linkage is modeled as a transverse open crack whose local flexibilities are calculated by using a fracture mechanics approach and the

Castigliano's theorem. The finite element method and Lagrange equation are employed to derive the equations of motion of the system. Dynamic responses are obtained by using the Runge-Kutta method. Influences on dynamic response of the system due to different depths and locations of the crack on flexible linkage are investigated.

Key Words: flexible linkage, crack, quick-return mechanism

一、簡介

速回機構在工業上被廣泛的應用，如刨床(shaper)、心軸壓床(arbor press)、高速衝壓機(high-velocity impacting press)等等。最初有關機構設計分析的研究，通常都假設機構的所有元件為剛體。對於早期精度要求較低、機構運轉速度較慢、負重較輕的機構設計來說，這樣的假設是合理的。然而隨著時代的演進，工業要求的精度大幅提昇，大型機具的出現(如牛頭式刨床)，其負重增大而設計元件卻要求輕量化，加上機具處於高轉速的運轉狀態，所設計的元件在這樣的嚴苛條件下，其撓性變形是越趨明顯，也就是說機構運動的實際位置與原先所設計的預期結果必有所出入。若設計者將所有的元件假設為剛體，則設計出來的機構必然無法符合高精度的需求。另外由於未考慮彈性變形而造成機構零件位置的不準確，隨之衍生的是破壞和噪音的增加，如此不但削減了機構的壽命，對於系統的效能也大打折扣。故為了考慮彈性變形的影響，本文所探討之速回機構系統，其連桿部分以 Timoshenko 樑模擬之，以達到合理化和精確度的要求。

裂縫對旋轉系統的威脅不容忽視，在旋轉機械軸方面已有研究者開發出偵測轉動機械軸上裂縫生成的方法。然而目前關於速回機構系統的研究當中，卻尚未有文獻討論其撓性連桿含裂縫時的動態行為，故吾人希望能夠透過本研究得到有關含裂縫之撓性速回機構的結果，對將來應用於速回機構之線上即時監控系統的相關研究能有所助益。

二、系統運動方程式

2-1 基本假設

本文所分析之速回機構的示意圖如圖 1 所示。 $\langle X, Y, Z \rangle$ 為左邊銷接點的固定座標系統， $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ 為其單位向量。 $\langle x, y, z \rangle$ 為附著於元素上的旋轉座標系統， $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ 為其單位向量。AB 為曲柄，其長度為 L_c ；OC 為連桿，其長度為 L_L ；兩銷接點 OA 的距離為 L_g 。曲柄與 X 軸之夾角為 α ，連桿與 X 軸之夾角為 β 。 x_j 為平移旋轉套筒(translating/rotating joint)上點 B 到座標原點的距離，並定義 OB 為連桿之前段，BC 為連桿之後段。並對所研究的速回機構做以下之基本假設：

1. 曲柄為剛體，且以等角速度 α_i 旋轉驅動連桿。
2. 撓性連桿為 Timoshenko 樑。
3. 平移旋轉套筒與連桿視為點接觸，並且忽略摩擦力。
4. 所有材料係數為定值。
5. 所有銷接處不考慮摩擦力。
6. 不考慮熱效應。
7. 此機構作平面運動。

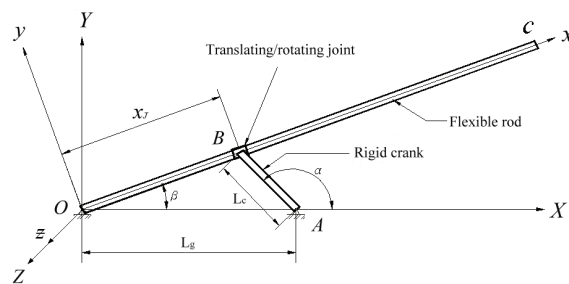


圖 1. 速回機構模型之示意圖

2-2 連桿內位移場及位置向量

考慮連桿為 Timoshenko 樑，連桿上元素中任意一點 $P_0(x, y, t)$ 受力變形後的位移場 $\vec{W}(x, y, t)$ 可表示如下：

$$\vec{W}(x, y, t) = [u(x, t) - y\theta(x, t)] \vec{i} + [v(x, t) - y\theta(x, t) \cdot \sin \theta] \vec{j} \quad (1)$$

其中 u 為軸向位移、 v 為橫向位移及 θ 為轉角位移。本文考慮連桿的變形為小變形， $\theta(x, t)$ 和 $\sin \theta$ 都非常小，故 $y\theta(x, t) \cdot \sin \theta$ 遠小於 $v(x, t)$ ，可忽略不計。故式(1)可化簡如下：

$$\vec{W}(x, y, t) = [u(x, t) - y\theta(x, t)] \vec{i} + v(x, t) \vec{j} \quad (2)$$

撓性連桿元素上點 P_0 變形前的位置向量為 $\vec{R}_{p0}$ ，變形後的位置向量為 $\vec{R}_p$ 。以連桿與地面之銜接點為原點，在旋轉座標下可將 $\vec{R}_p$ 表示如下：

$$\vec{R}_p = \vec{R}_{xyz} + \vec{R}_{p0} + \vec{W} \quad (3)$$

其中 $\vec{R}_{xyz}$ 為固定座標之原點到元素上旋轉座標之原點之向量， $\vec{W}$ 為 P_0 點的位移向量，且

$$\vec{R}_{xyz} = R_{xyz} \vec{i}$$

$$\vec{R}_{p0} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

式(3)的 $\vec{R}_p$ 可表示為

$$\vec{R}_p = (R_{xyz} + x + u - y\theta) \vec{i} + (y + v) \vec{j} \quad (4)$$

將 P 點的位置向量對時間微分後可得 $\vec{R}_{pt}$ ，表示如下：

$$\vec{R}_{pt} = \frac{d\vec{R}_p}{dt} = [u_t - y\theta - (y + v) \alpha_t] \vec{i} + [(R_{xyz} + x + u - y\theta) \alpha_t + v_t] \vec{j} \quad (5)$$

其中 $u_t = \frac{du}{dt}$ ， $v_t = \frac{dv}{dt}$ ， $\alpha = \frac{d\alpha}{dt}$ 。

2-3 連桿元素之動能與應變能

由動力學原理，連桿元素的動能 K_e 可表示如下：

$$K_e = \frac{1}{2} \rho \int_{v_e} (\vec{R}_{pt} \cdot \vec{R}_{pt}) dv_e \quad (6)$$

其中 ρ 為連桿之材料之密度， v_e 為元素之體積。將式(5)代入式(6)可得：

$$K_e = \frac{1}{2} \rho \int_0^{L(t)} \left[\rho A \left\{ u_t^2 + v_t^2 \right\} + \beta_t^2 (u^2 + v^2) + 2\beta_t (uv_t - vu_t) + 2\beta_t^2 (R_{xyz} + x)u + 2\beta_t (R_{xyz} + x)v_t + \beta_t^2 (R_{xyz} + x)^2 \right] + \rho I \left\{ (\beta_t \theta_t) + (\theta_t) + (\beta_t^2 \theta_t^2) + \beta_t^2 \right\} dx \quad (7)$$

其中 L 為元素之長度是時間 t 的函數， A 為連桿之截面積， I 為連桿之截面積慣性矩，

$$\theta_t = \frac{d\theta}{dt}。$$

考慮線性應變，應變函數 ε_{ij} 與位移場的關係如下：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right), \quad i, j = 1, 2 \quad (8)$$

其中 $a_1 = x$ ， $a_2 = y$ 。由式(2)可知 P_0 點在 x 方向之位移 u_1 及 y 方向之位移 u_2 分別如下：

$$u_1 = u(x, t) - y\theta(x, t)$$

$$u_2 = v(x, t)$$

將位移場函數代入式(8)，並忽略較高階的項式後，可得應變函數：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} - y\theta \\ \varepsilon_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta \right) = \varepsilon_{21}$$

由彈性力學得元素的應變能 S_e 可表示如下：

$$S_e = \frac{1}{2} \int_{v_e} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv_e \quad (10)$$

其中 $\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ ， E_{ijkl} 為材料在各方向的彈性模數， $i, j, k, l = 1, 2$ 。

將式(9)和 σ_{ij} 代入式(10)後可得

$$S_e = \frac{1}{2} \int_0^{L(t)} \left[EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + KGA \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta \right)^2 \right] dx$$

(11)

其中 E 為材料之楊氏係數, G 為剪力彈性模數, K 為剪力修正因子。

在曲柄的動能 K_{crank} 方面, 由剛體運動學可得:

$$K_{crank} = \frac{1}{8} M_c L_c^2 \alpha_t^2 + \frac{1}{2} J_c \alpha_t^2$$

其中曲柄的質量 M_c 、質量慣性矩 J_c 、長度 L_c 以及曲柄的轉速 α_t 均為定值。由於本文是利用 Lagrange 方程式推導系統的運動方程, 而 K_{crank} 中各項數值均為定值, 並不含廣義座標 q_i 的函數, 故 $\frac{dK_{crank}}{dq_i} = 0$, 也就是

說曲柄的動能並不影響系統的運動方程式。另外本文不考慮外力所作的功。

2-4 有限元素法

2-4-1 位移場的設定

考慮軸向變形 u 與轉角變形 θ 的相互影響甚微, 視為相互獨立; 但橫向變形 v 與轉角變形 θ 之間耦合的效應不可忽略。吾人可將變形位移場作以下假設:

$$\begin{aligned} u &= H_{11}^u u_i + H_{21}^u u_j \\ v &= H_{11}^v v_i + H_{12}^v \theta_i + H_{21}^v v_j + H_{22}^v \theta_j \\ \theta &= H_{11}^\theta v_i + H_{12}^\theta \theta_i + H_{21}^\theta v_j + H_{22}^\theta \theta_j \end{aligned} \quad (12)$$

u_i 、 v_i 及 θ_i 代表元素左邊節點的位移, u_j 、 v_j 、 θ_j 代表元素右端節點的位移, 如圖 2 所示; H_{11}^u 、 H_{11}^v 、 H_{11}^θ 等為形狀函數。

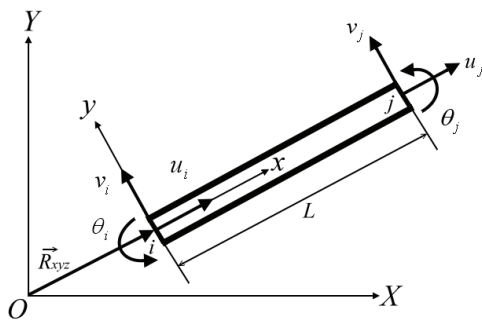


圖 2. 連桿元素之示意圖

2-4-2 Hermite 多項式

連桿的軸向變形 u 需滿足兩元素的諧和條件 (compatibility), 故以線性的 Hermite 多項式來近似。至於橫向變形 v 及轉角變形 θ 則分別以三階及二階多項式來近似。由有限元素法, 利用 Hermite 多項式來假設 u 、 v 和 θ 後可得以下結果:

$$u = \{H_u\} \{q_i\}^T \quad (13)$$

$$v = \{H_v\} \{q_i\}^T \quad (14)$$

$$\theta = \{H_\theta\} \{q_i\}^T \quad (15)$$

其中

$$\{H_u\} = \{H_{11}^u, 0, 0, H_{21}^u, 0, 0\}$$

$$\{H_v\} = \{0, H_{11}^v, H_{12}^v, 0, H_{21}^v, H_{22}^v\}$$

$$\{H_\theta\} = \{0, H_{11}^\theta, H_{12}^\theta, 0, H_{21}^\theta, H_{22}^\theta\}$$

$$\{q_i\} = \{u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j\}^T$$

由式(13)~(15)式可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \{D_u\} \{q_i\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{H_u\} \{\dot{q}_i\}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \{D_v\} \{q_i\}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \{H_v\} \{\dot{q}_i\}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \{D_\theta\} \{q_i\}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \{H_\theta\} \{\dot{q}_i\}。$$

其中

$$\{D_u\} = \frac{d}{dx} \{H_u\}$$

$$\{D_v\} = \frac{d}{dx} \{H_v\}$$

$$\{D_\theta\} = \frac{d}{dx} \{H_\theta\}$$

將式(12)帶入式(7)的 K_e 、式(11)的 S_e 得到：

$$\begin{aligned} K_e = & \frac{1}{2} \{\dot{q}_i\}^T ([m_1] + [m_2]) \{\dot{q}_i\} + \{q_i\}^T [c_3] \{\dot{q}_i\} \\ & + (\{T_{n1}\} + \{T_{n3}\}) \{\dot{q}_i\} + \{n_2\} \{q_i\} \\ & + \frac{1}{2} \{q_i\}^T ([k_2] + [k_3]) \{q_i\} + T_a + T_b \end{aligned} \quad (16)$$

$$S_e = \frac{1}{2} \{q_i\}^T ([k_4] + [k_5] + [k_6]) \{q_i\} \quad (17)$$

其中

$$[m_1] = \rho A \int_0^{L(t)} (\{H_u\} \{H_u\}^T + \{H_v\} \{H_v\}^T) dx$$

$$[m_2] = \rho I \int_0^{L(t)} \{H_\theta\} \{H_\theta\}^T dx$$

$$[c_3] = \rho A \beta_t \int_0^{L(t)} (\{H_u\} \{H_u\}^T + \{H_v\} \{H_v\}^T) dx$$

$$[k_2] = \rho A \beta_t \int_0^{L(t)} (\{H_u\} \{H_u\}^T + \{H_v\} \{H_v\}^T) dx$$

$$[k_4] = EA \int_0^{L(t)} \{D_u\} \{D_u\}^T dx$$

$$[k_5] = KGA \int_0^{L(t)} \{D_\gamma\} \{D_\gamma\}^T dx$$

$$[k_6] = EI \int_0^{L(t)} \{D_\theta\} \{D_\theta\}^T dx$$

$$[T_{k1}] = \rho A \beta_t \int_0^{L(t)} (\{H_u\} \{H_v\}^T + \{H_v\} \{H_u\}^T) dx$$

$$[T_{n1}] = \rho A \beta_t \int_0^{L(t)} (x + R_{xyz}) \{H_v\}^T dx$$

$$\{T_{n3}\} = \rho I \beta_t \int_0^{L(t)} \{H_\theta\}^T dx$$

$$\{n_2\} = \rho A \beta_t \int_0^{L(t)} (x + R_{xyz}) \{H_u\}^T dx$$

$$T_a = \rho A \beta_t^2 \int_0^{L(t)} (x + R_{xyz})^2 dx$$

$$T_b = \rho I \int_0^{L(t)} \beta_t^2 dx$$

$$\{D_\gamma\} = \frac{d}{dx} \{H_v\} - \{H_\theta\} \quad (18)$$

2-5 能量法

本文利用能量法中的 Lagrange 方程式來推導系統的運動方程式。若不考慮外力對連桿元素所作的功，則 Lagrangian 函數 L_E 可表示如下：

$$L_E = K_e - S_e \quad (19)$$

將式(16)、(17)代入上式可得到元素的 Lagrangian 函數。而 Lagrange 方程式表示如下：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L_E}{\partial q_i} = 0 \quad (20)$$

將式(19)代入上式則可推得連桿元素的運動方程式，表示如下：

$$[m_e] \{\ddot{q}_i\} + [c_e] \{\dot{q}_i\} + [k_e] \{q_i\} = \{n_e\} \quad (21)$$

其中

$$[m_e] = [m_1] + [m_2]$$

$$[c_e] = [c_1] + [c_2]$$

$$[k_e] = [k_1] - [k_2] - [k_3] + [k_4] + [k_5] + [k_6]$$

$$\{n_e\} = -\{n_1\} + \{n_2\} - \{n_3\}$$

且

$$[c_1] = \frac{d}{dt} [m_1]$$

$$[c_2] = \frac{d}{dt} [m_2]$$

$$[k_1] = \frac{d}{dt} [T_{k1}]$$

$$\{n_1\} = \frac{d}{dt} \{T_{n1}\}$$

$$\{n_3\} = \frac{d}{dt} \{T_{n3}\}$$

$$[k_3] = \rho I \beta_t \int_0^{L(t)} \{H_\theta\} \{H_\theta\}^T dx$$

然而，由於連桿之前段元素的最後一個節點與後段元素的第一個節點是固定在平移旋轉套筒上，而平移旋轉套筒會隨著曲柄的角度不同而改變其位置，造成元素的長度會隨時間而改變；即元素的長度為時間之變數。所以連桿之前段元素與後段元素的長度在每個時間點上都不相同， $[m_e]$ 、 $[c_e]$ 、 $[k_e]$ 及 $\{n_e\}$ 中有許多參數會因此而有前後段之別，故元素矩陣必須分為前段元素矩陣與後段元素矩陣來定義。

將前段與後段元素疊加之後，可得整個系統的運動方程式如下：

$$[M]\{\ddot{Q}_s\} + [C]\{\dot{Q}_s\} + [K]\{Q_s\} = \{N\} \quad (22)$$

其中為 $[M]$ 為系統質量矩陣， $[C]$ 為系統阻尼矩陣， $[K]$ 為系統勁度矩陣， $\{N\}$ 為系統非齊性項之矩陣， $\{Q_s\}$ 為連桿元素之各節點的位移。

運動方程式中的各函數由剛體運動學可求出如下：

$$x_J = [L_g^2 + L_c^2 + 2L_g L_c \cos \alpha]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \sin^{-1} \left[\frac{L_c \sin \alpha}{x_J} \right]$$

由上兩式可得：

$$\dot{x}_J = \frac{dx}{dt} = \frac{-L_g L_c \alpha_t \sin \alpha}{x_J}$$

$$\dot{\beta} = \frac{L_c \alpha_t \cos(\alpha - \beta)}{x_J}$$

$$\ddot{\beta} = \frac{L_g L_c \alpha_t^2 (L_c^2 - L_g^2) \sin \alpha}{x_J^4}$$

若連桿前段取 n 個元素，每一個元素長

度為 $l_f = \frac{x_J}{n} l_f$ ；設前段第 i 個元素的座標原點為 $R_f(i) = (i-1)l_f$ 。若連桿後段取 m 個元素，每一個元素長度為 $l_b = \frac{1}{n}(L - x_J)$ ；設前段第 j 個元素的座標原點 $R_b(j) = x_J + (j-1)l_b$ 。

三、裂縫模型之建立

線彈性破壞力學理論是常用於研究結構受破壞時的一種分析理論。基本上線彈性破壞力學是基於裂縫頂端的應力場、裂縫的大小、型態、方位與結構的材料特性等來分析估計裂縫對結構所造成的影響。當結構承受負載時，其彈性變形所產生的能量會處存於應變能中，而裂縫的延伸需要能量，此種能量即稱為破壞能。破壞能對結構的內能來說是一種消耗，使得結構的柔度增加導進而致應變的增加，這也就是線彈性破壞力學理論的基礎依據。

本文在求得裂縫對連桿所造成的柔度之基本過程如下：先決定負載條件與裂縫型態後，可求出此條件下的應力強度因子；再根據應力強度因子，求出應變能密度函數，進而得到裂縫對結構所造成的柔度。

3-1 應變能密度函數

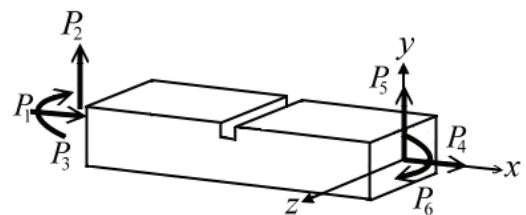


圖 3. 含裂縫連桿之示意圖

Dimarogonas 和 Paipetis [1] 引用局部柔度矩陣來描述裂縫對結構所造成的柔度，並根據 Paris 和 Tada 等人[2] 之 Parisz 方程式，考慮連桿元素的受力如圖 3 所示，則在 i 方向，由深度為 a 之裂縫所造成連桿元素的額外位移量 U_i 為：

$$U_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \int_0^a J(\tilde{a}) d\tilde{a} \quad (23)$$

其中 $J(\tilde{a})$ 為應變能密度函數(strain

energy density function)，而應變能密度函數與應力強度破壞因子的關係如下：

$$J(\tilde{a}) = \frac{1}{E'} \left[\left(\sum_{j=1}^3 K_{Ij} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 K_{IIj} \right)^2 + (1+\nu) \left(\sum_{j=1}^3 K_{IIIj} \right)^2 \right] \quad (24)$$

其中 K_{Ij} 、 K_{IIj} 和 K_{IIIj} 分別為張開模式(opening mode)、滑動模式(sliding mode)和撕裂模式(tearing mode)之應力強度因子。 ν 為波桑比(Poisson's ratio)， E' 為彈性模數。因本文考慮之系統為二維平面運動機構，即 $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ，為平面應力問題，所以 $E' = E$ 。

考慮連桿只受軸向力 P_1 、剪力 P_2 及彎矩 P_3 ，故只考慮由張開模式與滑動模式所造成的張裂與剪裂；即應力強度因子只有 K_{Ij} 與 K_{IIj} 。則式(24)可化簡為：

$$J(\tilde{a}) = \frac{1}{E} \left[\left(\sum_{j=1}^3 K_{Ij} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 K_{IIj} \right)^2 \right] \quad (25)$$

3-2 應力強度因子

圖 4 所示為連桿之裂縫處的截面，裂縫深度為 a ，連桿截面之高度及寬度分別為 h 和 b 。定義裂縫深度比為 $d = \frac{a}{h}$ 。根據 Paris 和 Tada 等人[2]可得各有效的應力強度因子表示如下：

$$K_{I1} = \frac{P_1}{A} \sqrt{\pi \tilde{a}} F_{I1}(\tilde{a})$$

$$K_{II2} = \frac{KP_2}{A} \sqrt{\pi \tilde{a}} F_{II}(\tilde{a})$$

$$K_{I3} = \frac{6P_3}{bh^2} \sqrt{\pi \tilde{a}} F_{I3}(\tilde{a})$$

$$F_{I1}(\tilde{a}) = 1.122 - 0.23\left(\frac{\tilde{a}}{h}\right) + 10.55\left(\frac{\tilde{a}}{h}\right)^2 - 21.71\left(\frac{\tilde{a}}{h}\right)^3 + 30.382\left(\frac{\tilde{a}}{h}\right)^4 \quad (26)$$

$$F_{II}(\tilde{a}) = \frac{1.122 - 0.561\left(\frac{\tilde{a}}{h}\right) + 0.085\left(\frac{\tilde{a}}{h}\right)^2 + 0.18\left(\frac{\tilde{a}}{h}\right)^3}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{a}}{h}\right)}} \quad (27)$$

$$F_{I3}(\tilde{a}) = 1.122 - 1.40\left(\frac{\tilde{a}}{h}\right) + 7.33\left(\frac{\tilde{a}}{h}\right)^2 - 13.08\left(\frac{\tilde{a}}{h}\right)^3 + 14.0\left(\frac{\tilde{a}}{h}\right)^4 \quad (28)$$

由於軸向力 P_1 只造成張裂、剪力 P_2 只造成剪裂、彎矩力 P_3 也只導致張裂，故式(25)可簡化如下：

$$J(\tilde{a}) = \frac{1}{E} [K_{I1}^2 + 2K_{I1}K_{I3} + K_{I3}^2 + K_{II2}^2] \quad (29)$$

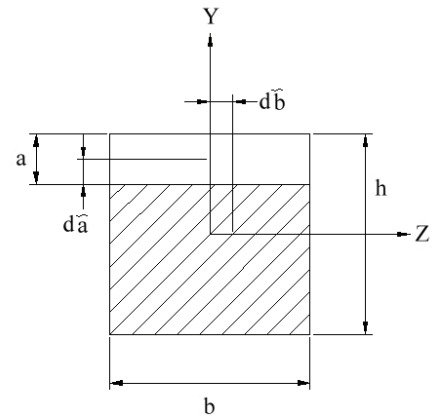


圖 4. 裂縫單元剖面之幾何關係圖

3-3 局部柔度

由式(23)Paris 方程式及根據應變能理論，由於裂縫所造成之連桿的局部柔度 C_{ij} 為：

$$C_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a J(\tilde{a}) d\tilde{a} d\tilde{b} \quad (30)$$

不同外力 P_i 對裂縫所造成的局部柔度如下：

$$C_{11} = \frac{\partial^2}{\partial P_1 \partial P_1} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a J(\tilde{a}) d\tilde{a} d\tilde{b} = E\eta_{11}$$

$$C_{12} = \frac{\partial^2}{\partial P_1 \partial P_2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a J(\tilde{a}) d\tilde{a} d\tilde{b} = 0$$

$$C_{13} = \frac{\partial^2}{\partial P_1 \partial P_3} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a J(\tilde{a}) d\tilde{a} d\tilde{b} = E\eta_{13}$$

$$C_{21} = \frac{\partial^2}{\partial P_2 \partial P_1} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a J(\tilde{a}) d\tilde{a} d\tilde{b} = 0$$

$$C_{22} = \frac{\partial^2}{\partial P_2 \partial P_2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a J(\tilde{a}) d\tilde{a} d\tilde{b} = E\eta_{22}$$

$$C_{23} = \frac{\partial^2}{\partial P_2 \partial P_3} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a J(\tilde{a}) d\tilde{a} d\tilde{b} = 0$$

$$C_{31} = \frac{\partial^2}{\partial P_3 \partial P_1} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a J(\tilde{a}) d\tilde{a} d\tilde{b} = E\eta_{31}$$

$$C_{32} = \frac{\partial^2}{\partial P_3 \partial P_2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a J(\tilde{a}) d\tilde{a} d\tilde{b} = 0$$

$$C_{33} = \frac{\partial^2}{\partial P_3 \partial P_3} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a J(\tilde{a}) d\tilde{a} d\tilde{b} = E\eta_{33}$$

其中

$$\eta_{11} = \frac{2\pi}{b} [0.629d^2 - 0.173d^3 + 5.932d^4 - 10.72d^5 + 31.58d^6 - 67.44d^7 + 139.0d^8 - 146.6d^9 + 92.31d^{10}]$$

$$\eta_{22} = \frac{2\pi\lambda^2}{b} [0.792d^2 + 0.318d^4 + 0.410d^5 + 0.344d^6 - 0.130d^7 - 0.032d^8 + 0.053d^9 - 0.127d^{10} - 0.187d^{11} - 0.039d^{12} + 0.057d^{13} + 0.031d^{14}]$$

$$\eta_{13} = \frac{12\pi}{h} [0.629d^2 - 0.610d^3 + 5.096d^4 - 11.10d^5 + 26.76d^6 - 48.98d^7 + 81.80d^8 - 77.93d^9 + 42.53d^{10}]$$

$$\eta_{33} = \frac{72\pi b}{h^2} [0.629d^2 - 1.047d^3 + 4.602d^4 - 9.975d^5 + 20.29d^6 - 32.99d^7 + 47.05d^8 - 40.69d^9 + 19.60d^{10}]$$

$$\eta_{31} = \eta_{13}$$

由上列各式可得由裂縫所造成的局部柔度矩陣

陣 $[C_{ij}]$ 為

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{31} \\ 0 & C_{22} & 0 \\ C_{31} & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (31)$$

3-4 含裂縫元素之勁度矩陣

因為 $[C_{ij}]$ 為 3×3 的矩陣，系統中的元素矩陣是 6×6 ，故 $[C_{ij}]$ 必須經由轉換矩陣的處理，使裂縫對元素所造成之柔度分置於元素的兩個節點，即 6×6 的局部柔度矩陣 $[C_{local}]_{6 \times 6}$ 。如圖 3 所示，轉換矩陣 $[T]_{6 \times 3}$ 可由力平衡的觀點求得如下：

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = [T]_{6 \times 3} \begin{Bmatrix} P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

其中

$$[T]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

裂縫處之局部柔度矩陣可由下式求得：

$$[C_{local}] = [T][C_{ij}][T]^T \quad (34)$$

故含裂縫之連桿元素的總柔度矩陣

$[C_{total}^{ec}]$ 可表示為未含裂縫之連桿元素的柔度矩陣 $[C_0]$ 加上裂縫的局部柔度矩陣 $[C_{local}]$ ，如下：

$$[C_{total}^{ec}] = [C_0] + [C_{local}] \quad (35)$$

最後可得含裂縫之連桿元素的勁度矩陣

$[K_{total}^{ec}]$ 為：

$$[K_{total}^{ec}] = [C_{total}^{ec}]^{-1} \quad (36)$$

四、數值模擬之結果與討論

本文的主要目的在研究含裂縫之撓性連桿速回機構的動態行為，探討當裂縫位於撓性連桿上不同位置與不同裂縫深度比時，對系統的動態響應有何影響。連桿的動態響應是以 Runge-Kutta 數值積分法來求解。

本文所分析的系統有兩個參數尺寸，接列於表 1。在驗證程式時，所使用的系統參數為參數尺寸 1，此參數尺寸與 Fung 和 Lee [3] 的所用的相同。但由於文獻[3]中並未定義撓性連桿之截面尺寸，而應力強度因子與連桿截面尺寸有關，是裂縫模型中必須

的參數，不可缺少。另外參數尺寸 1 所用的單位為較不普遍的英制單位。考慮以上這兩個因素，吾人定義新的參數尺寸系統，即公制參數尺寸 2 的系統。

為方便比較不同裂縫位置之動態響應的差別，吾人定義了連桿上的裂縫位置 1、2 與 3，如圖 5 所示，以區別連桿上裂縫位置的不同。

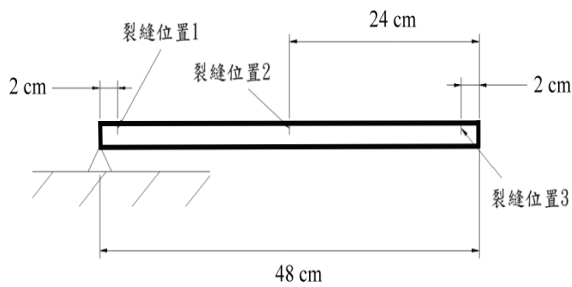


圖 5. 裂縫位置圖

表 1. 參數尺寸的各项數據

	參數尺寸 1	參數尺寸 2
連桿長度 L	9.746 inch	0.48 m
曲柄長度 L_c	1.5 inch	0.07 m
兩銷接點距離 L_g	4 inch	0.16 m
楊氏係數 E	30.68 lb/in^2	$2.0 \times 10^{11} N/m^2$
連桿截面寬度 b	—	0.032 m
連桿截面高度 h	—	0.04 m
連桿截面積 A	0.4351 $inch^2$	$1.28 \times 10^{-3} m^2$
連桿面積慣性矩 I	0.0951 $inch^4$	$1.707 \times 10^{-7} m^4$
材料密度 ρ	0.000725 $lb \cdot s^2/in^4$	$7800 kg/m^3$
波桑比 ν	0.3	0.3
曲柄轉速 $\dot{\alpha}$	90 rad/s	90 rad/s

4-1 程式之驗證

吾人先建立無裂縫之撓性速回機構之有限元素模型，撓性連桿以 Timoshenko 樑模擬之。考慮參數尺寸 1 的系統，連桿以 4 個元素來模擬，本文所得的之連桿端點的動態響應如圖 6(a)、圖 7(a)和圖 8(a)，並與文獻[3]的結果如圖 6(b)、圖 7(b)和圖 8(b)作

比較。從圖 6~8 的結果看來，本文以 4 個元素所模擬的結果與文獻[3]的結果相當吻合，並且驗證了程式的正確性。

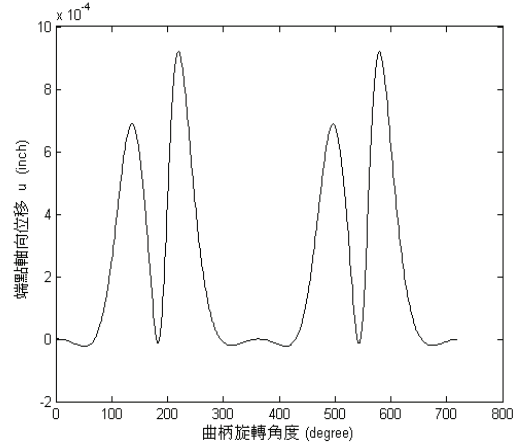


圖 6(a). 本文的結果

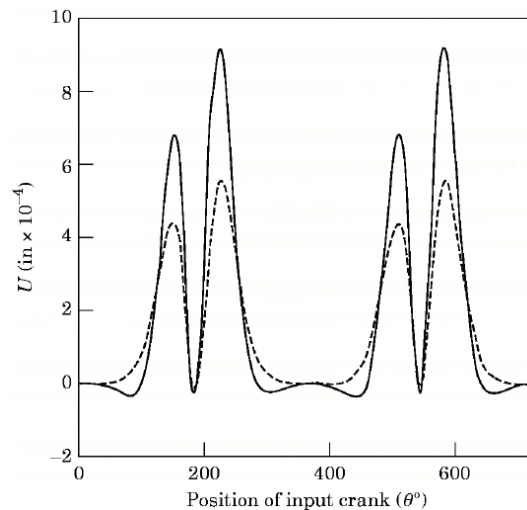


圖 6(b). Fung 和 Lee [3]的結果

(--- Euler 樑，— Timoshenko 樑)

圖 6. 撓性連桿端點之位移 u 的動態響應圖

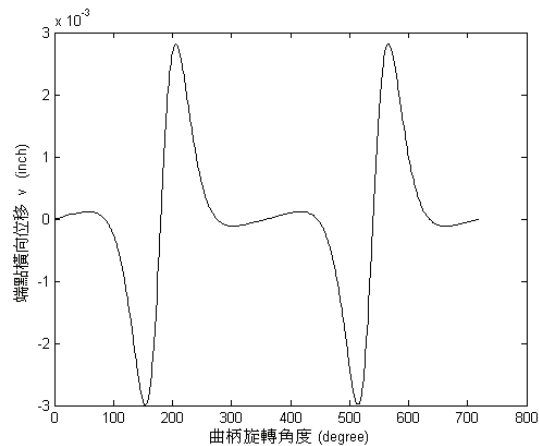


圖 7(a). 本文的結果

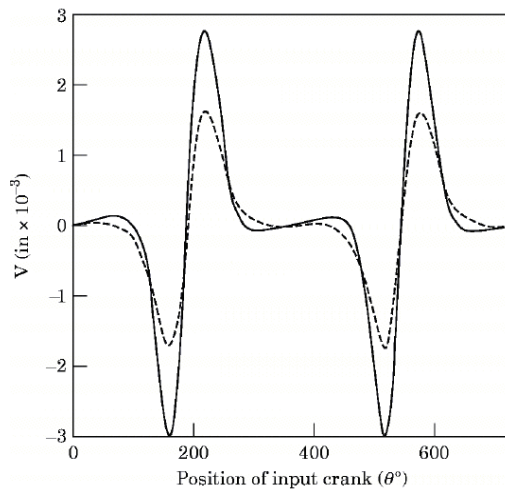


圖 7(b). Fung 和 Lee [3]的結果
(--- Euler 樑, — Timoshenko 樑)

圖 7. 撓性連桿端點之位移 v 的動態響應圖

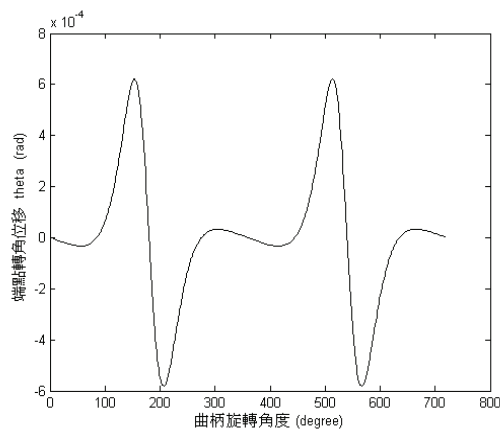


圖 8(a). 本文的結果

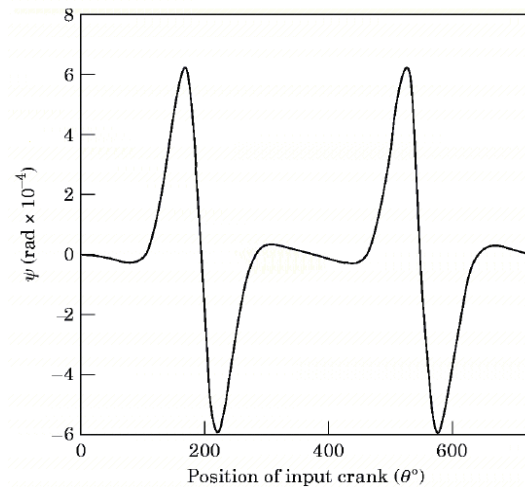


圖 8(b). Fung 和 Lee [3]的結果

(--- Euler 樑, — Timoshenko 樑)

圖 8. 撓性連桿端點之位移 θ 的動態響應圖

4-2 含裂縫之速回機構系統

4-2-1 不同裂縫位置之動態響應

圖 9 所示為裂縫深度比為 0.5，裂縫位置 1、2 和 3 時所得到之連桿端點位移圖。結果顯示當裂縫的位置不同，連桿端點位移的響應有相當大的影響。

4-2-2 不同裂縫深度比之動態響應

考慮連桿上有不同深度比的裂縫 (0, 0.25, 0.5)，圖 10~12 所示分別為裂縫在三個不同位置時連桿端點位移的動態響應。由結果可發現，當裂縫在同一位置時，裂縫深度越大對連桿造成越大的位移量差。此結果表示當裂縫的深度增加時，撓性連桿的柔度也隨之增加。

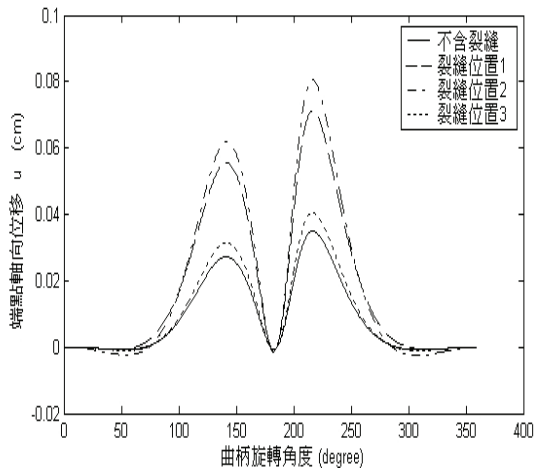


圖 9. 不同裂縫位置之連桿端點位移的動態響應圖(裂縫深度比=0.5)

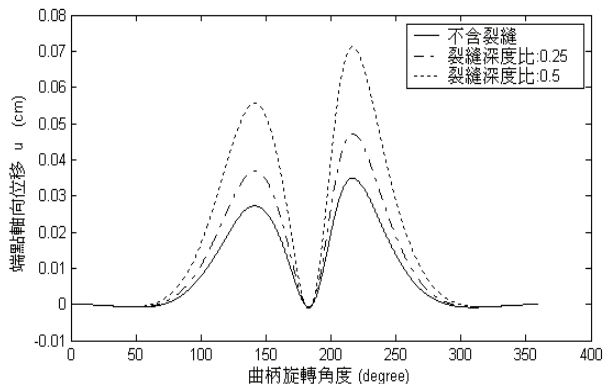


圖 10. 不同裂縫深度之連桿端點位移的動態響應圖(裂縫於位置 1)

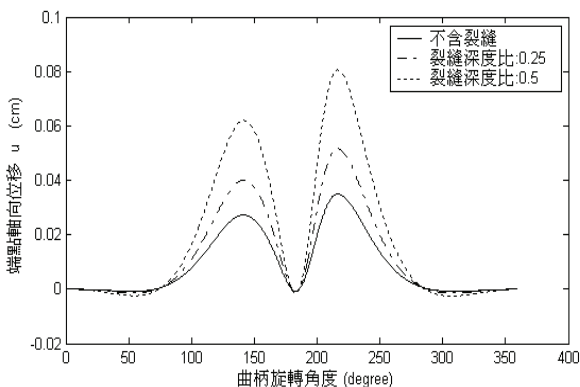


圖 11. 不同裂縫深度之連桿端點位移的動態響應圖(裂縫於位置 2)

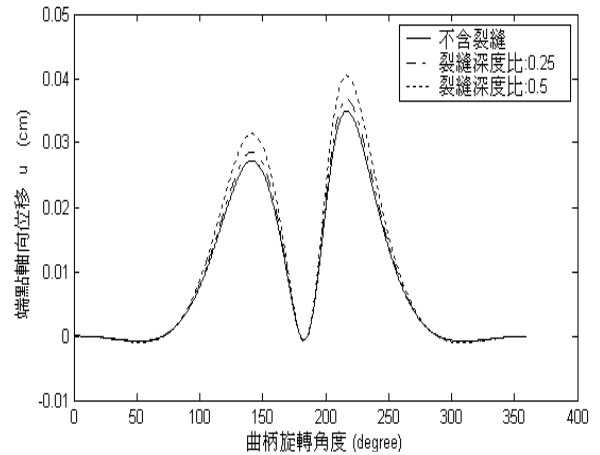


圖 12. 裂縫深度之連桿端點位移的動態響應圖(裂縫於位置 3)

五、結論

本文以有限元素法建構撓性速回機構模型，此機構模型由固定轉速之剛性曲柄帶動撓性連桿。而撓性連桿假設為 Timoshenko 樑，並採用應力強度因子和卡氏定理來求出裂縫對連桿所產生的柔度。本文應用 Lagrange 方程式來導出系統的運動方程式，並以 Runge-Kutta 數值方法來求解系統的動態響應。

由於本文在使用有限元素法時，設定連桿之前段元素的最後一個節點與後段元素的第一個節點是附著於平移旋轉套筒上。這樣的設定使得元素的長度會隨著曲柄旋轉的角度不同而改變，吾人需將元素分為前段元素和後段元素，且元素長度是時間的函數，這是一般有限元素法較少遇到的情形。

對於含裂縫之撓性速回機構的系統，由數值模擬的結果可以歸納出以下幾個結論：

1. 連桿上不同位置的裂縫，對系統動態響應的影響不同；裂縫的位置越靠近平移旋轉套筒，連桿端點處位移的偏移量增加越多。
2. 當連桿上裂縫的深度越大時，連桿的柔度增加越多，連桿端點之動態響應位移量亦隨之增加。

本文的研究針對含裂縫之撓性速回機構系統作分析，討論撓性連桿上不同裂縫位置與裂縫深度對系統動態響應的影響。後續的

研究可針對含裂縫之撓性速回機構系統的穩定性作分析。另外發展具學習能力的類神經網路系統，對速回機構系統的振動作線上監控，亦是一可行之研究方向。

六、參考文獻

1. Dimarogonas, A. D. and Paipetis, S. A., Analytical Methods in Rotor Dynamics, Applied Science Publishers, London and New York, 1983.
2. ada, H., Paris, P. and Irwin, G., The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corporation, Paris, 1985.
3. Fung, R. F. and Lee, F. Y., ‘ ‘Dynamic Analysis of the Flexible Rod of a Quick-Return Mechanism with Time-Dependent Coefficients by the Finite Element Method,’ ’ Journal of Sound and Vibration, Vol. 199(2), pp. 237-251, 1997.