

砲控迴路用彈丸追蹤濾波預測法則

洪兆宇^{1*} 方淳民² 趙嘉琦³ 尹清崗⁴ 尹清岩⁵

¹陸軍軍官學校機械系

²空軍航空技術學院飛機工程系

³軍備局生產製造中心生產管理組

⁴軍備局中山科學研究院電子裝備研究所

⁵逢甲大學機械與電腦輔助工程系

摘 要

在新一代火炮中均已成功地運用砲令射控，要求即時量測彈丸和目標之間的偏差量，因此射控雷達要同時完成對彈丸運動和目標運動的跟蹤任務，實現對彈丸目標的精確跟蹤對射控雷達而言是一個新的任務。本文建立一種對此類問題的濾波和預測方法，使濾波和預測誤差比常規方法減少。經由實際驗證結果顯示，使用此濾波和預測方法，可使彈丸和目標之間的偏差量控制在一定範圍內，提升射擊精度。

關鍵詞：砲令射控，濾波，彈道，預測

Predicting and Filtering Algorithm for Projectile Motion Tracking in Fire Control Loop

Chao-Yu Hung^{1*}, Chun-Min Fang², Chia-Chi Chao³,
Ching-Kang Yin⁴, and Ching-Yan Yin⁵

¹Department of Mechanical Engineering, Chinese Military Academy

²Department of Aircraft Engineering, Air Force Institute of Technology

³Production Management Section, MPC, Armaments Bureau

⁴Electronic Systems Research Division, CSIST, Armaments Bureau

⁵Department of Mechanical and Computer Aided Engineering, Feng Chia University

ABSTRACT

The fire control has been applied on modern automatic gun system successfully. Since the error between projectile and object is asked to measure immediately, thus the fire control must track projectile and object real time. It is a new task for fire control radar realization to track projectile and object accurately. In this paper a filter and prediction method will be proposed. It can reduce the filtering and prediction error significantly. A superior experimental show that the proposed filter and prediction method have the tracking error bound a small range and the precision will be promoted.

Key words: fire control, filtering, projectile trajectory, radar

文稿收件日期 98.3.23.；文稿修正後接受日期 99.2.2.；*通訊作者

Manuscript received March 23, 2009；revised February 2, 2010.；*Corresponding author.

一、前言

在武器系統中，射控雷達的任務是跟蹤並量測敵方目標的位置參數，運用統計濾波器等方法，建立目標動態狀態方程式(Dynamic state equation)，並估測其狀態，預測目標未來位置，用於射控系統擊靶問題的求解。對運動目標的濾波和預測算法已進行了大量的研究，其技術和應用已非常成熟，這裡不再討論。然而隨著計算機技術和雷達量測技術的發展，在新一代中口徑火炮中，開始採用閉迴路修正彈丸軌跡的方法，來提高命中機率，所謂閉迴路修正彈丸軌跡，就是測量彈丸與目標位置的偏差，並根據偏差的大小即時產生砲令、修正射擊諸元，進行下一發射擊。這樣就給射控雷達提出了新的任務，即即時量測彈丸的位置參數，並應用相對的濾波和預測算法，建立彈丸的運動方程式，並產生砲令、修正偏差，使誤失距離(Miss Distance)降至最小。

火炮終究非主要武器裝備，且為求降低成本，儘量將搜索與追蹤功能合一，故採用TWS(Tracking-While-Scanning)雷達，但由於雷達能同時跟蹤的目標有限，每發彈丸都不能進行全彈道跟蹤，而只能給出彈道上的幾個測量點。其一，在閉迴路彈丸軌跡修正時，就須要根據這幾個量測點的值，經過平滑(Smoothing)、濾波(Filtering)與估測(Prediction)，來求出彈丸的實際位置，並外求彈丸位置與目標位置的實際偏差量。其二，處理區間短。由於我們只關心彈丸與目標是否相接近，因此所謂的高精度是對彈丸在接近目標時之一設定區間內的需求，對彈道的其他部分沒有嚴格要求。其三，精度高，斜距離的預測均方差小於5公分。其四，處理速度快，由於要求即時跟蹤，因此每發彈丸的數據處理時間要小於彈丸之間的最小停滯時間。對中口徑快砲而言，這個停滯在0.5秒~1秒之間。綜上知，對彈丸軌跡之濾波與預測成為砲令射控之成敗關鍵，並成為研究之對象。另本文說明砲令射控追蹤濾波之特色為追蹤鎖定彈丸，研析美軍已服役之系統皆採濾波併同射表預測彈丸軌跡之運算法則，同時達成快速與精準之規格要求，然而其最重要之處為彈道性能要完全匹配射表與

濾波器；本文重新修正後外掛此二計算法則，使之匹配國造彈藥。[1-9]。

二、問題描述

為了減少雜訊及不確定性因素在系統中所造成的影響，必須將確定性系統轉為隨機控制系統處理。此受控制系統的品質，端視狀態估測是否精確及選用何者控制策略而定。目前常用的狀態估測器各有其優缺點，而控制策略的選擇則受制於價格、計算速度與系統之複雜度等因素。有關控制策略，自以閉迴路最佳，然而對非線性時變相關性的隨機系統很難獲得閉迴路最佳控制，遂有Kalman推導出循環替進關係以獲得最佳控制，Singer曾對不同的目標進行各種數位濾波器之目標追蹤比較，發現狀態估測精度確以Kalman濾波器為優，但計算時間與記憶體使用太多[10]。砲令射控中為求即時運算，另發展出 $\alpha-\beta$ 濾波器[11]，由於 α, β 為常數，可依不同的需要而選定 α, β 值，故對低閃躲目標能提供較精準的估測值，且由於運算法則簡單，易於硬品實踐，常做為地對空目標追蹤之濾波器。

學理上，對運動數據進行濾波，其算法有一個共同之特點，其性能指標要求「線性無偏最小變異量估計」，故理論上穩態的各種濾波運算法則均具有相同之結果。在砲令射控中追蹤彈道軌跡數據樣本少，用Kalman濾波法則難以得到穩態解，且計算時間長、硬體實作較難，不為美軍使用，故接續前段看法，美軍另發展 $\alpha-\beta$ ($\alpha-\beta-\gamma$) 濾波運算法則， $\alpha-\beta$ 濾波法則係簡化Kalman濾波法則而得，美軍以 $\alpha-\beta$ 濾波追蹤法則追蹤目標，預測目標下一狀態位置；然而砲令射控，雷達必須追蹤彈丸軌跡時，則輔以併同使用射表預測，將雷達追蹤閘(Tracking gate)鎖定此一預測位置區域，由於原廠彈藥與原廠操作射表匹配之正確性極高，依據射表及計算之飛行平衡時間，產生砲令並射擊，目標與彈丸同時進入追蹤閘，若未能擊中目標，誤失距離也能被檢知，並隨即修正，不消3~5發，就擊中目標。

但是為配合「買砲造彈」政策以外造火

砲系統射擊國造彈藥時，套用美軍原廠運算法則，常無法順利完成運算，形成有效射擊。經研討砲令射控大多運用於中口徑快砲，為求快速射擊，故彈藥皆屬全備彈，以增加操作便利性，其不似分離式或分裝式彈藥，射擊前須先完成裝藥調整，只要彈藥程式相同，要求彈道性能是一致的，初速及精度變異非常小，然而國造彈藥由於係自行設計且工藝水準有別，初速及精度變異比較大，尤其使用不同批號彈藥時，差異更明顯，繼續套用美軍射控濾波法則將無法匹配，乃研究改採集中 β 濾波法則與改良最小二乘率波法則，以修正射控濾波法則配合國造彈藥，仍能使系統操作，且達到一定之射擊精度規格，此為為本文討論之問題。

三、射表併同濾波之追蹤法則

在砲令射控中，雷達被要求能夠同時追蹤目標與彈頭。目標通常是飛機，運用已發展成熟的追蹤濾波法則已綽綽有餘，但是彈頭因為速度快，雷達橫截面小，現有濾波法則追蹤起來非常困難。所幸砲彈是我方發射，其外彈道性能諸元是被掌握的，使用射表併同濾波之追蹤計算是可行且必然的方法，因此，濾波法則趨於簡化，但外加輔助已知的外彈道性能，使追蹤精度增加，運算時間減少，此一作法是融合兩系統的優點，先以射表給定彈丸初始條件，雷達追蹤開依照其條件運用濾波法則遞迴運算，追蹤彈丸並鎖定；若彈丸脫鎖，則又以射表計算彈丸可能位置，輸入信息調整追蹤開，再度鎖定彈丸。若濾波法則正常工作時，則在射表每個信息點進行離散追蹤，同時利用射表信息對濾波法則進行修正。在訊號雜訊比超過要求或追蹤窗無目標訊號時，採用射表訊息；在射表失靈以及在射表離散訊號點以外其他

時段，濾波法則仍進行工作。由上述說明得知，射表在砲令射控中佔有非常重要的地位，其與濾波法則是互補的，若有精準的射表，就可使濾波的負荷大幅降低。

射表是進行砲令射控的重要工程，是確定射擊諸元的依據。傳統上，它以表格的形式描述了彈道諸元，亦即彈道參數之間以及彈道參數與射擊條件之間的關係。各種火砲和不同彈種都有專門的射表。它是根據火砲對不同的彈種進行射擊實驗所量測的大量數據並結合外彈道方程的解算而編製成的。

一個完整的射表除包含基本諸元外，還包括火砲與彈道的基本資料。所謂基本諸元，主要指射程、瞄準角、飛行時間，彈道頂點高度，另應包括裝藥量、初速、橫風速度、縱風速度、氣壓、環境溫度，由於原廠射表係為原廠彈藥「量身訂作」，要使國造彈藥完全符合原廠射表，在彈藥工程上，其困難程度相當高。於是改從控制工程上著手，控制工程的精義在於迴饋修正，以此觀念發展出設計者射表，亦即先修正射表，然因資源有限，僅能利用實射彈種軌跡之若干點為基準，這些點因為火砲的實射條件與標準條件經常不同，實射條件與標準條件的相應諸元差，稱為修正量；以標準參考彈外彈道軌跡設定平衡點，但偏離量侷限在一小範圍內，而且可以用砲口初速差異值(Difference Muzzle Velocity, ΔMV)與綜合彈道係數變量 $\%BC$ (Ballistic Constant 的變化率)，來求出修正量間之線性化關係，再利用該二項為輸入項(Input)，取涵蓋面之點的彈道數據作外推，就其物理意義而言，即求取受非標準彈藥初速及非標準射擊環境之影響[1, 6]。以 ΔMV 及 $\%BC$ 為自變數，採用 5×5 外推工作表，表示如圖1，以線性化方法及曲線逼近方法，求出估計之軌跡點，再求出修正量[1, 12-13]。

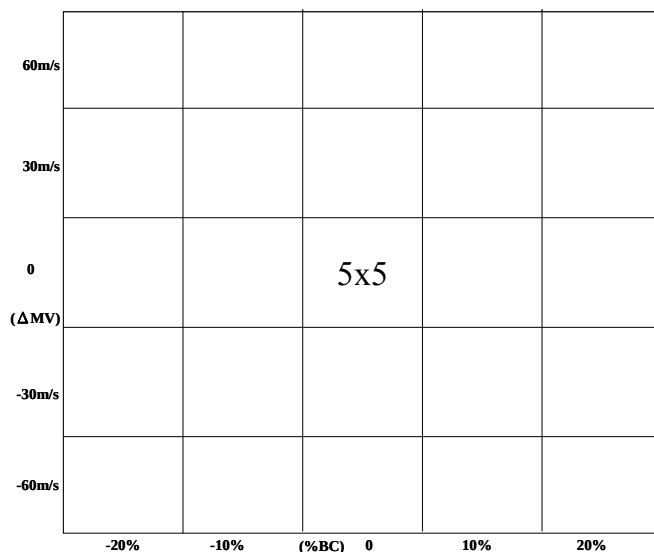


圖 1. 5x5 外推工作表圖。

可能由於阻燃劑包面技術差異，國造發射藥之藥性與原廠發射藥之藥性仍有差異，在部分長射程或高仰角射擊條件時，常不能適用設計者射表，乃再研議將設計者射表擴增為二次曲線逼近射表，其想法係將平衡點附近之線性化，延伸為軌跡之二次曲線化，同一彈頭軌跡前數點之位置數據，預測下一點之位置，理論證明詳見附錄，細部完整說明詳見文獻[1, 7-8]。

四、 $\alpha - \beta$ 濾波法則

在砲令射控運用中，Kalman 濾波法則由於運算複雜，處理費時，未見有直接運用者，然而在美軍神盾級艦採用的是 $\alpha - \beta$ 濾波法則[14-17]，其原理完整正規而嚴謹之推導詳見文獻[15]，本文提出以另一種簡單、易懂之推導，考量目標量測值可表為：

$$y(t) = x(t) + v(t) \quad (1)$$

其中

$x(t)$ ：目標位置實際值。

$y(t)$ ：量測值。

$v(t)$ ：雜訊。

在雷達量測訊號中 $\{v(t)\}$ 是白色雜訊；即

$$E[v(t)] = 0 \quad (2)$$

$$E[v(t)v(t)] = r^2 \delta(t - \tau) \quad (3)$$

為簡化模式，並且假設目標在短時間內作等速運動，則令狀態 $x_1(t) = x(t)$ ， $x_2(t) = \dot{x}(t)$ ；狀態方程式可表為

$$\dot{\bar{x}} = F\bar{x} + Lw \quad (4)$$

其中

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{w(t)\}$ 是程序雜訊，亦為一白色雜訊，即

$$E[w(t)] = 0 \quad (5)$$

$$E[w(t)w(t)] = q^2 \delta(t - \tau) \quad (6)$$

物理上之意義為目標加速度擾動，用以描述目標的機動誤差。則(1)量測方程式可表為

$$y(t) = H\bar{x} + v(t) \quad (7)$$

其中 $H = [1 \ 0]$ ；今假設 $\alpha - \beta$ 濾波器之穩態誤差變異矩陣 P 為一 2×2 之方陣，則必需滿足 Riccati 矩陣代數方程式

$$FP + PF^T + q^2 LL^T - \frac{1}{r^2} PH^T HP = 0 \quad (8)$$

其中 $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ 為對稱矩陣，由(8)

可得出下列聯立方程式：

$$\begin{cases} 2p_{12} - \frac{p_{11}^2}{r^2} = 0 \\ p_{22} - \frac{p_{11}p_{12}}{r^2} = 0 \\ -\frac{p_{12}^2}{r^2} + q^2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

由上式可解得 $p_{11} = r\sqrt{2qr}$ ， $p_{12} = qr$ ， $p_{22} = q\sqrt{2qr}$ ，則由 $\alpha - \beta$ 濾波法則可知狀態最佳前向增益矩陣 K 可表為

$$K \equiv \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{r^2} PH^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2q}}{r} \\ \frac{q}{r} \end{bmatrix} \quad (10)$$

令信號雜訊比 $S/N \cong \frac{q}{r}$ ，則

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2S}}{N} \\ \frac{S}{N} \end{bmatrix} \quad (11)$$

在砲令射控中，最佳前向增益矩陣 K 取決於 α 、 β 兩個常數，而其根據信號雜訊比 S/N 來確定，故 $\alpha - \beta$ 濾波法則易于實作，吾人知， $\alpha - \beta$ 濾波器的前向增益矩陣的常數 α 、 β 取決於 S/N ， S/N 越大則 α 、 β 也越大。物理概念上， S/N 越大，意味著目標的觀測誤差較大，因此應使測量數據的權重增大，故 α 、 β 應大些。反之， S/N 越小，意味著目標的量測雜訊較小，應使測量數據的權重減小，故 α 、 β 應小些。

$\alpha - \beta$ 濾波運算法則其狀態預測與濾波遞迴如下：

$$\hat{x}\langle k+1|k \rangle = \Phi \hat{x}\langle k|k \rangle \quad (12)$$

$$\hat{x}\langle k|k \rangle = \hat{x}\langle k|k-1 \rangle + k(\alpha\beta)[Y\langle k \rangle - H\hat{x}\langle k|k-1 \rangle] \quad (13)$$

$\alpha - \beta$ 濾波器對於狀態變化不大的系統，能提供精確的估測值，且計算時間較短，其追蹤法則表示如后[18-21]，有關目標在第 n 次掃瞄經平滑(Smooth)後之位置 P_{sn} 可表為

$$P_{sn} = P_{pn} + \alpha(P_n - P_{pn}) \quad (14)$$

其中 P_{pn} 表預測目標於雷達第 n 次掃瞄之位置； P_n 表目標在雷達第 n 次掃瞄量測位置。目標在第 n 次掃瞄經平滑後之速度 V_n 可表為

$$V_n = V_{n-1} + A_{n-1}T + \frac{\beta}{T}(P_n - P_{pn}) \quad (15)$$

其中 A_{n-1} 表目標在第 $n-1$ 次掃瞄經平滑後之加速度； T 表雷達掃瞄時間。另目標在第 n 次掃瞄經平滑後之加速度 A_n 可表為

$$A_n = A_{n-1} + \frac{\gamma}{T^2}(P_n - P_{pn}) \quad (16)$$

則預測目標於雷達第 $n+1$ 次掃瞄之位置 P_{pn+1} 為

$$P_{pn+1} = P_{sn} + V_nT + \frac{1}{2}A_nT^2 \quad (17)$$

美軍砲令射控遞迴運算中，使用 $\alpha - \beta$ 濾波法則作為連續傳遞(Propagation)時，配合使用原廠射表以為離散修正(Correlation)。

五、集中 β 濾波法則

因為 $\alpha - \beta$ 濾波器面對高度閃躲性狀態目標或取樣點少的彈道軌跡時顯得力不從心，為了改善此項缺失，遂有美國辛辛納提電子公司(Cincinnati Electronics Corp.)、英國馬可尼雷達公司(Marconi Radar Projects Limited)等發展集中 β 濾波器(Centroid Beta filter)佐以彈道軌跡積分曲線擬合(Curve

fitting)等技巧使目標運動、彈道解算及目標前置位置等計算更為精準[2-6, 22-26]。

在一般之追蹤濾波器來說，具有平滑、濾波和預測三項功能。對射控系統而言，最重要者是根據濾波結果來預測下一時間目標和砲彈之位置，即誤失距離 (MD)，供解算砲令之用，因此在追蹤運算法則選用時，考慮砲彈對目標之命中率，應比考慮對閃躲目標之跟隨程度還重要。另就跟踪效果而言，會有過阻尼 (Over damped)、欠阻尼 (Under damped) 和臨界阻尼 (Critically damped) 三種情況。欠阻尼即表示追蹤濾波器對目標閃躲之情況反應較快，但會有超越量 (Overshoot) 和擺動 (Oscillation) 之現象。而過阻尼對目標運動軌跡之平滑較好。至於臨界阻尼之特性，則是比欠阻尼有較佳之平滑，而比過阻尼對閃躲之反應較快，因其無欠阻尼之超越量與擺動，因此砲令射控中應以臨界阻尼之濾波器為佳，在 α - β 濾波器之模型中可利用 Z 轉換求得臨界阻尼時 α, β 之關係

$$\begin{cases} \alpha > 2\sqrt{\beta} - \beta & \text{for over damp} \\ \alpha = 2\sqrt{\beta} - \beta & \text{for critical damp} \\ \alpha < 2\sqrt{\beta} - \beta & \text{for under damp} \end{cases} \quad (18)$$

$$\alpha = \frac{2}{m} - \frac{1}{m^2} \quad (19)$$

$$\beta = \frac{1}{m^2} \quad (20)$$

其中 m 為一調整輸入值；在集中 β 追蹤濾波器中

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \frac{RE}{TC} \quad (21)$$

RE ：速率誤差 (Rate error)

TC ：時間常數 (Time constant)

當目標沒有閃躲時， β 值愈來愈小，目標的追蹤就愈來愈平滑，擊中目標的機率也就愈大，然而 β 值愈小，追蹤法則就愈來愈不靈敏，此時如果目標閃躲就不容易追蹤，因此這個部份利用誤差訊號的大小來辨別目標是否真的在閃躲，如果目標真的閃躲，則重新修正時間常數 TC 即相當於 $\frac{1}{\beta}$ ，來放大

系統的分佈，以期望擊中閃躲目標。此外，時間常數影響暫態響應之上升時間、尖峰時間、最大超越量及安定時間；尤其是安定時間約為 3 倍時間常數，此處被用來調整射控系統之暫態性能，詳細證明參閱[27-28]。在使用集中 β 濾波法則時，搭配使用設計者射表[1, 6]。

六、改良最小二乘法濾波法則

在最小二乘法濾波法則算法中選定彈丸之數學模型：

$$D_i = D_0 + at_i + bt_i^2 \quad (22)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + ct_i \quad (23)$$

$$q_i = q_0 = \text{const.} \quad (24)$$

其中 D 是斜距， ε 是仰角， q 是迴旋角，吾人可以用數學語言對這一過程進行描述： D 是自變數 t 和待定參數 D_0 、 a 、 b 的函數

$$D = D_0 + at + bt^2 \quad (25)$$

現給定 n 對觀測值 (D_i, t_i) ，要求確定參數 D_0 、 a 、 b 的估測值 $\hat{D}_0$ 、 $\hat{a}$ 、 $\hat{b}$ ，使

$$Q = \sum_{i=1}^n \left[D_i - (\hat{D}_0 + \hat{a}t_i + \hat{b}t_i^2) \right]^2 \quad (26)$$

為最小，為使 Q 達到極小，應滿足

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{D}_0} = \frac{\partial Q}{\partial \hat{a}} = \frac{\partial Q}{\partial \hat{b}} = 0 \quad (27)$$

即為：

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i^3 \\ \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i^3 & \sum_{i=1}^n t_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{D}_0 \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n D_i \\ \sum_{i=1}^n t_i D_i \\ \sum_{i=1}^n t_i^2 D_i \end{bmatrix} \quad (28)$$

解此線性方程式，即可求得滿足要求的 $\hat{D}_0$ 、 $\hat{a}$ 、 $\hat{b}$ ，然後代入下式進行運算

$$\hat{D} = \hat{D}_0 + \hat{a}t_i + \hat{b}t_i^2 \quad (29)$$

當 $t \leq t_n$ 時， $\hat{D}$ 就是 D 的濾波值，當 $t > t_n$ 時， $\hat{D}$ 就是 D 的預測值。

1. 斜距濾波及估測之改進算法

為了再提高濾波和預測的精度，吾人提出改良最小二乘估算法。吾人發現濾波和預測誤差大的原因在於 a 、 b 估測值誤差太大，遠超過合理的範圍。吾人從理論上分析產生這種結果的原因，為了方便討論，以一階模型為例。根據統計學理論，對於一階模型 a 的估測值 $\hat{a}$ 滿足下式：

$$\hat{a} = N\left(1, \frac{a^2}{l_u}\right) \quad (30)$$

其中

$$l_u = \sum_{i=1}^n (t_i - t)^2 \quad (31)$$

$$t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad (32)$$

$$t_i = i \times \frac{S}{32}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

取 $n = 8$ 則 $\hat{a}$ 的變異量為

$$D\hat{a} = \frac{a^2}{l_u} = (4.94\sigma)^2 \quad (33)$$

取 $n = 16$ 則 $\hat{a}$ 的變異量為

$$D\hat{a} = \frac{a^2}{l_u} = (1.735\sigma)^2 \quad (34)$$

這說明 $\hat{a}$ 的變異量比量測誤差大很多，同樣的道理，在使用二階模型時，加入 $\hat{b}$ 的變異量，其誤差變得更大。這使吾人推論如能以其他方法取得 a 、 b 的估測值，只要其估測值高於傳統最小二乘法給出的 $\hat{a}$ 、 $\hat{b}$ 的精度，則濾波和預測的精度就會提高。因為彈丸的運動是很精確的，但運動的特性是已知的，所以吾人可以很容易地根據射表推算得到 a 、 b 的估測值，並且這種估測值的精度遠高於傳統濾波方法所達到精度。下面先從純理論上對此一方法進行分析。

假設可以用不依賴於觀測數據的方法給出 a 、 b 的估測值 $\hat{a}$ 、 $\hat{b}$ ，估測值偏差分別為 Δa 、 Δb 則：

$$\hat{a} = a + \Delta a \quad (35)$$

$$\hat{b} = b + \Delta b \quad (36)$$

觀測數據為：

$$x_i = D_i + \varepsilon = D_0 + at_i + bt_i^2 + e_i \quad (37)$$

$$e_i = N(0, \sigma^2) \quad (38)$$

則對 D_0 的最小二乘估測為

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{a}t_i - \hat{b}t_i^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [D_0 + (a - \hat{a})t_i + (b - \hat{b})t_i^2 + e_i] \\ &= D_0 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\Delta at_i + \Delta bt_i^2 + e_i] \end{aligned} \quad (39)$$

故知：

$$E[\hat{D}_0] = D_0 - \frac{\Delta a}{n} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{\Delta b}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad (40)$$

$$D[D_0] = E[(\hat{D}_0 - E[\hat{D}_0])^2] = \frac{\sigma^2}{n} \quad (41)$$

t_j 時刻的濾波值為：

$$\hat{D}_j = \hat{D}_0 + \hat{a}t_j + \hat{b}t_j^2 \quad (42)$$

其平均值為

$$E[\hat{D}_j] = D_j + \Delta a(t_j - \bar{t}) + \Delta b(t_j^2 - \bar{t}^2) \quad (43)$$

$$\text{其中 } \bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad \bar{t}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2$$

其變異量：

$$E[(\hat{D}_j - E(\hat{D}_j))^2] = \frac{\sigma^2}{n} \quad (44)$$

當 $j > n$ 時，上式就是預測的平均值和變異量，對於一次預測而言，(43) 式中， $\Delta a[t_j - \bar{t}] + \Delta b[t_j^2 - \bar{t}^2]$ 相當於系統偏差，與模型誤差作用相同。對於多次預測來說， $\Delta a[t_j - \bar{t}] + \Delta b[t_j^2 - \bar{t}^2]$ 也是一個隨機變化的量。假設 Δa 的變異量為 σ_a ， Δb 的變異量為 σ_b ，二者平均值為 0，則 $\hat{D}_j$ 的平均值與變異量分別為：

$$E[\hat{D}_j] = D_j \quad (45)$$

$$D[\hat{D}_j] = \frac{\sigma^2}{n} + \sigma_a^2(t_j - \bar{t})^2 + \sigma_b^2(t_j^2 - \bar{t}^2) \quad (46)$$

從上式可以看出，只要 σ_a^2 、 σ_b^2 足夠小，對 D_j 的濾波和預測變異量就越小，但其下限為 σ^2/n ，這是樣本數據對預測結果的限制。從(46)式中可以看出，預測變異量與測量誤差 a 、 b 的估測誤差都有關係。測量誤差已由測試設備確定，這裡我們討論一下如何對 a 、 b 進行估測，其誤差又有多大。比較(25)式與一般的等加速度運動方程式：

$$x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2 \quad (47)$$

顯然 a 相當於彈丸在 D_0 點的徑向速度， b 是彈丸在整個濾波期間的平均加速度的一半。由於彈丸運動存在隨機散佈因素，因此我們無法事先知道每一次具體射擊的彈道參數。但是在編製射表時，我們已經掌握了彈丸的平均彈道，並將有關數據編成一個表格，因此，當射角、初速和環境條件等射擊條件已知時，就可以由射表求出平均彈道上各點運動參數，包括上述徑向速度和平均加速度。以此作為 a 、 b 的估計值，具有相當

高的精度，因為估計值誤差主要由 D_0 的估測誤差、環境測量誤差、初速估測誤差及射表誤差組成，相對射控雷達的測量誤差比較小。由於二階模型的模型誤差較小，遠小於濾波和預測誤差，因此可以說按(25)式計算的值，就是預測的總變異量。很顯然，這個結果要比單純用最小二乘法計算的效果好。

最後我們將算法歸納一下：

根據射表和射擊條件估計 a 、 b 值。

$$\text{求 } D_0 = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} (D_i - at_i - bt_i^2)$$

計算濾波和預測值： $D_i = D_0 + at_i + bt_i^2$

2. 仰角濾波及估測之改進算法

在彈道直線段上，彈道的仰角數據變化平緩，可以用一個線性函數來逼近，即：

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + ct_i \quad (48)$$

當有 16 個點的觀測數據，並採用常規的最小二乘法進行處理時，預測的最大變異量為：

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{(t_0 - \bar{t})^2}{l_{tt}} \right) \sigma_\varepsilon^2 = (0.825\sigma_\varepsilon)^2 = (0.07425)^\circ \quad (49)$$

對 c 的預測變異量為：

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{l_{tt}} = (1.735\sigma_\varepsilon)^2 = (0.167)^\circ \quad (50)$$

σ_ε 是對仰角數據的測量變異量，等於 0.096° ，這說明，如果用其他方法對 c 的預測變異量小於 $0.167^\circ/\text{sec}$ ，則可提高預測精度。在彈道直線段， c 的取值範圍為 $0.1^\circ/\text{sec} \sim 0.3^\circ/\text{sec}$ ，所以對 c 的估測值變異量可以小於 $0.167^\circ/\text{sec}$ 。這樣，我們就可以根據射表來給定 c 值並估測 $\hat{c}$ 值，然後再由下式計算出 ε_0 的估測值。

$$\hat{\varepsilon}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \hat{c}t_i) \quad (51)$$

最後，得到仰角的濾波和預測值。

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{\varepsilon}_0 + \hat{c}t_i \quad (52)$$

令 c 的估測值變異量為 σ_c ，則仰角預測變異量為：

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{n + \sigma_c^2(t_i - \bar{t})^2} \quad (53)$$

實際上，由於 σ_c 較小，預測變異量主要取決於測量變異量 σ_ε^2 。

3. 方位角濾波與預測之新算法

對方位角，在採用零階即常數式來進行濾波和預測時，隨機誤差引起的預測變異量為 0.024° ，模型誤差小於 0.005° ，因此沒有必要採用更複雜的模型，只需對測量數據取平均值即可。

$$\hat{q} = \sum_{i=1}^{16} q_i \quad (54)$$

濾波和預測的變異量為 $\frac{\sigma_q^2}{n}$ ，其中 σ_q^2 是方位角的測量變異量。

4. 係數估測值的求取

根據前節的論述，我們知道係數 a 是彈丸在彈道濾波和預測區間內的平均徑向加速度和彈道仰角平均變化率。根據外彈道學知識，當射角、初速和環境條件已知時，它們都是以射距為自變數的出數。這些函數的值可以藉由解算彈道方程而得到，也可以事先計算好並作為射表數據的一部份，使用時如同其他射擊諸元一樣，可查表得到，以往射表製作時大多未使用這幾個參數，因此應當根據射表提供的彈道參數重新計算彈道，以得到我們需要的參數，為了提高射控系統的運算速度，可以將這些數據逼近為多項式，在火控系統中計算更方便。

具體的計算步驟總結如下：

依據設計者射表彈道解算標準射擊條件下，不同射角和斜距時的值 a_0 、 b_0 、 c_0 。

由 ΔMV 及 $\%BC$ 計算在單位偏差條件下不同射角和斜距時 a 、 b 、 c 的修正值。

依上述砲令資訊，指令雷達掃描，若掃描可獲量測值，則將量測值平滑，預測下一掃描位置；若未獲量測值，逕用射表值，已使濾波循環遞迴。可將各次平滑數據逼近為多項式。

曲線逼近多項是計算出 a 、 b 、 c 的估計值 $\hat{a}$ 、 $\hat{b}$ 、 $\hat{c}$ 。

5. 系統特性說明

這種方法的估測誤差取決於彈丸的散佈、射表本身的精確度和射擊條件的精度。由於射表本身的精度較高，射擊條件的輸入也可以很準確，因此彈丸的散佈是估測誤差的主要因素。在使用改良最小二乘濾波法則時，搭配使用擴增設計者射表[1, 6]。此處說明，彈丸飛行量測區間依各彈種之各射擊諸元而訂定，其設定匹配設計者設表之平衡點（追蹤外推 5×5 搜索區域）；16 個量測點係製作全涵蓋面射表而訂定。雷達追蹤目標，運用設計者射表計算出目標-彈丸飛行平衡時間，並匹配設計者量測（使用追蹤開）平衡時間之前之平衡點。故對於不同目標，須依設計者射表決定量測點，通常超過平衡時間後，目標及彈丸仍有回跡，表示目標未被擊落，此時需要多追蹤彈丸 1~2 點，以完成誤失距離估算。量測點選用之誤差計算，量測點選用較多，固然變異量小，但計算費時，形成時間誤差，反而使精度變差，此處係參照原設計者射表全涵蓋面之設計而定。因係修改系統，不宜大幅更動主架構；船艦火力均有整體規劃，遠距離目標由飛彈對付，隨著目標逼近，由 5 吋砲，76mm 砲，40mm 砲，近迫防禦則交由 20mm 砲之近迫防禦系統（Closed-in-weapon-system, CIWS），每種火炮只運用其彈丸軌跡接近線性段（即離平衡點不遠，仍能收斂）之特性，若目標距離過遠，超出設計者射表涵蓋面，一般狀況下，將不射擊。

七、測試評估

雷達、火炮及彈藥均為砲令射控系統不可或缺的一部分，三者均具有高性能（Fast motion, Fast setting time）及高精密度（High accuracy）等特性之伺服控制系統，其機械結構並非一整體之剛體（Rigid body），實務上並出現非常多之非線性現象；若以模擬方式來分析，首在考量數學模式（Mathematic model）之獲得，以完成動態方程式，這是非常非常困難，而且容易失真的。本文設定作戰需求為海軍二代艦 PFG-II 加裝 40mm 快砲，參照國際驗船協會測試驗收規範，以海上航行實測為準，Mk-92 射控系統先追蹤水面目標—FAB 飛彈快艇（FC1, FC2, FC4/5 控制），同時經由伺服馬達次系統帶動 350PX 型 40 快砲追瞄水面目標，驗收平面（SU）目標，在由同樣程序，追蹤拖靶機拖曳之空靶，實彈射擊空靶。測評時採海上射擊空靶驗證，空靶由拖靶機拖曳，並以感測器連接拖靶機，用以得知射擊結果為「近靶」抑或「遠靶」，立即由拖靶機報靶。測試課目為十連發射擊

散佈界驗證。驗證項目區分為：

標準：原廠系統配原廠彈藥（武三系統），射控軟體為 $\alpha-\beta$ 濾波器及原廠射表。

研改方案 0 系統：原廠系統配國造彈藥，射控軟體為 $\alpha-\beta$ 濾波器及原廠射表。

研改方案 1 系統：原廠系統配國造彈藥，射控軟體為集中 β 濾波器及設計者射表。

研改方案 2 系統：原廠系統配國造彈藥，射控軟體為改良最小二乘法濾波器及擴增設計者射表。

1. 測試時各項操作之任務分配

由於測試空中目標速度為 200 公尺/秒，及雷達及快砲光電系統的性能限制，各操作手的任務需求時間及接戰距離，分配如圖 2 所示。

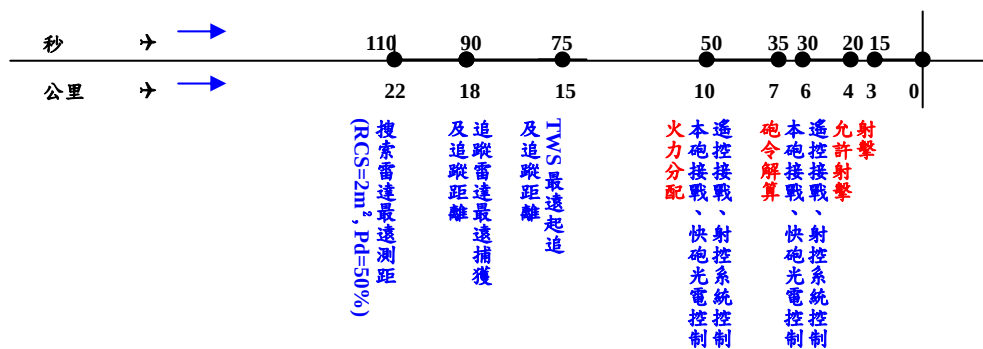


圖 2. 操作手任務分配圖。

2. 課目一（夜間單機一般航線）

（一）說明：測試時使用雷達截面積約為 2m²，編號為 FCK(B) 空中目標，在夜間以單機攻擊飛行，除驗證雷達性能之外，亦用以驗證系統的兩門火炮在夜間同時對單一目標的接戰能力。FCK(B) 以 3000 呎高度，由正北方進場，順時鐘方向共飛行五圈，另兩圈為預備航

次。測試的任務分配為該單機由追蹤雷達及射控系統帶 #1 砲以遙控接戰模式來執行，同時該機亦由搜索帶追蹤器追蹤而將其指派給 #2 砲以本砲接戰模式使用 OFCS 系統來操作。

（二）課目一之場景：飛行之場景如圖 3 所示。

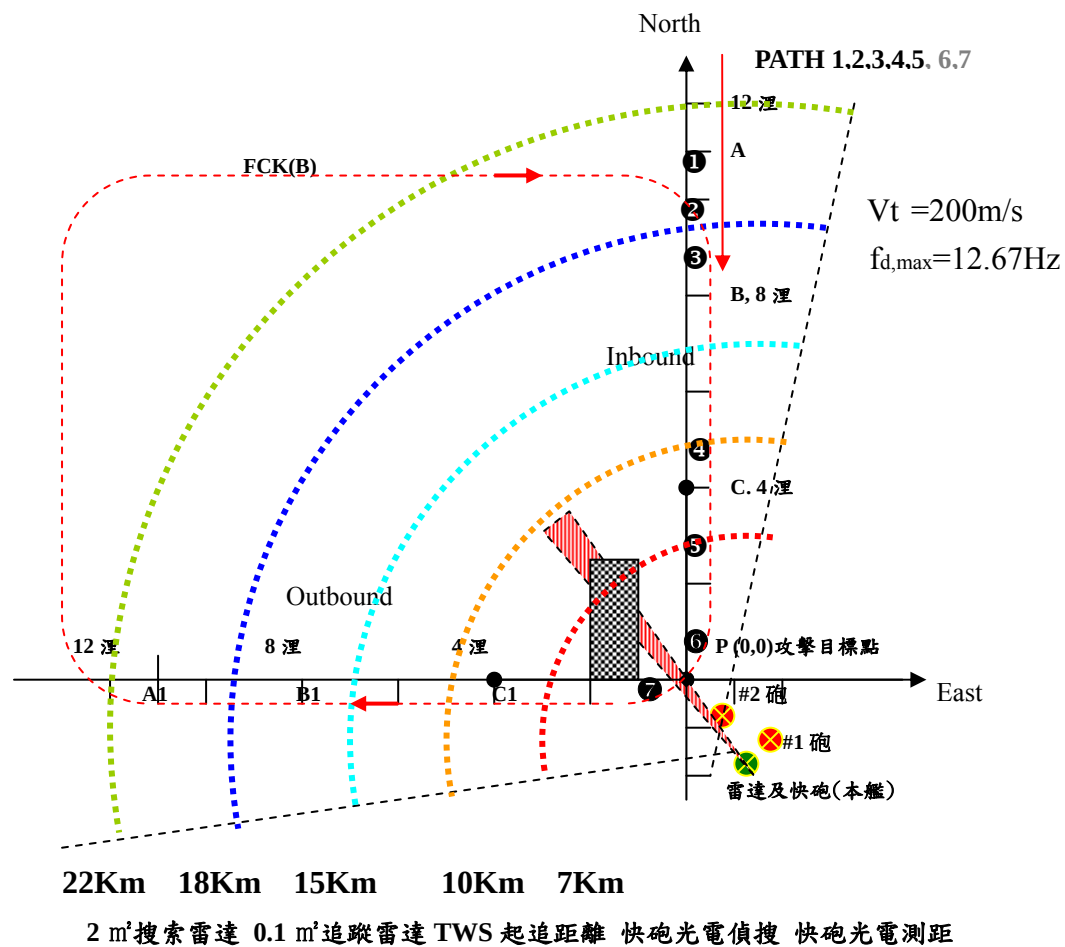


圖 3. 課目一-夜間單機一般航線圖。

由接戰課目一實測結果，使用標準系統、研改 0-2 等系統在迴旋軸及俯仰軸之散佈界及偏差量如表 1 所示。

表 1. 40mm/70 鋼霰彈散佈界驗證性能比較表

軸向	迴旋軸		俯仰軸	
	散佈界 (mrad)	偏差 (mrad)	散佈界 (mrad)	偏差 (mrad)
項目				
標準	0.37	0.77	0.72	0.61
研改 0	脫靶	-	脫靶	-
研改 1	0.45	1.18	0.92	0.77
研改 2	0.41	0.95	0.71	0.39

由附表 1 所示，使用原廠系統配國造彈藥，射控軟體為 $\alpha - \beta$ 濾波器及原廠射表，射擊結果彈藥均脫靶。經修改射控軟體為集中 β 濾波器及設計者射表，可使國造彈藥之「遠靶」現象改善，其中迴旋軸散佈界控制在 0.45 mrad，俯仰軸散佈界控制在 0.92 mrad。另修改射控軟體為改良最小二乘法濾波器及擴增設計者射表，迴旋軸散佈界控制在 0.41 mrad，俯仰軸散佈界控制在 0.71 mrad。

另接戰課目一，有關標準系統、研改 1 系統及研改 2 系統之十連發散佈界如圖 4-6 所示。

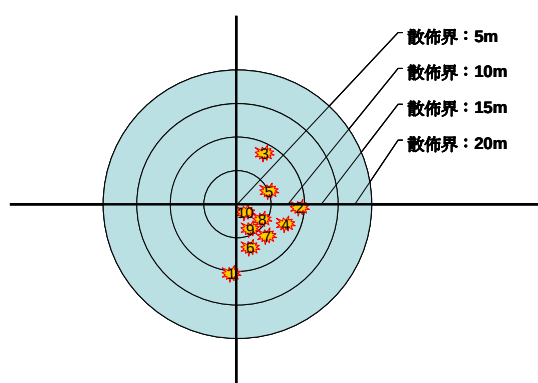


圖 4. 標準系統之十連發散佈界。

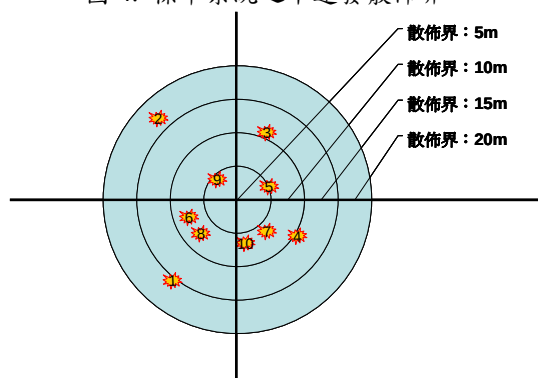


圖 5. 研改 1 系統之十連發散佈界。

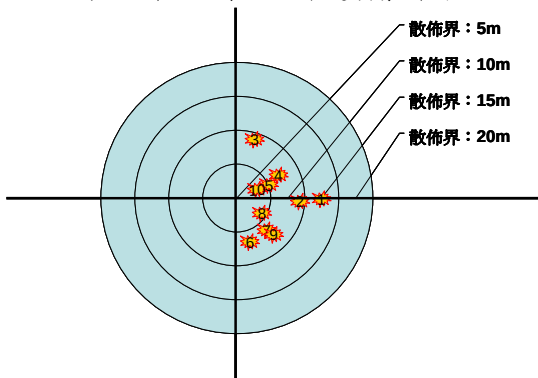


圖 6. 研改 2 系統之十連發散佈界。

3. 課目二(單機空對面戰術攻擊與脫離)

(一)說明：測試時使用雷達截面積約為 2m^2 ，編號為 FCK(B)空中目標，在日間以單機攻擊飛行，除驗證雷達性能之外，亦用以驗證系統的兩門火炮在日間同時對單一目標的接戰能力。飛行路徑在攻擊時為直線飛行，脫離時以 S 字路徑回頭。在 Path 1,3,5 時，FCK(B)由正北進場，以 500 呎飛到攻擊點 P(0,0)上空右轉，以 15 度角拉昇，平飛後左轉回頭，以執行 Path 2,4,6。執行 Path 2,4,6 時，FCK(B)由正西進場，以 500 呎高度飛到攻擊點 P(0,0)上空左轉，以 30 度角拉昇，平飛後右轉回頭，以執行 Path 3,5。測試的任務分配為該單機由追蹤雷達及射控系統帶 #1 砲以遙控接戰模式來執行，同時該機亦由搜索帶追蹤器追蹤而將其指派給 #2 砲以本砲接戰模式使用 OFCS 系統來操作。

(二)課目二之場景：飛行之場景如圖 7 所示。

由接戰課目二實測結果，使用標準系統、研改 0-2 等系統在迴旋軸及俯仰軸之散佈界及偏差量如表 2 所示。

另接戰課目二，有關標準系統、研改 1 系統及研改 2 系統之十連發散佈界如圖 8-10 所示。

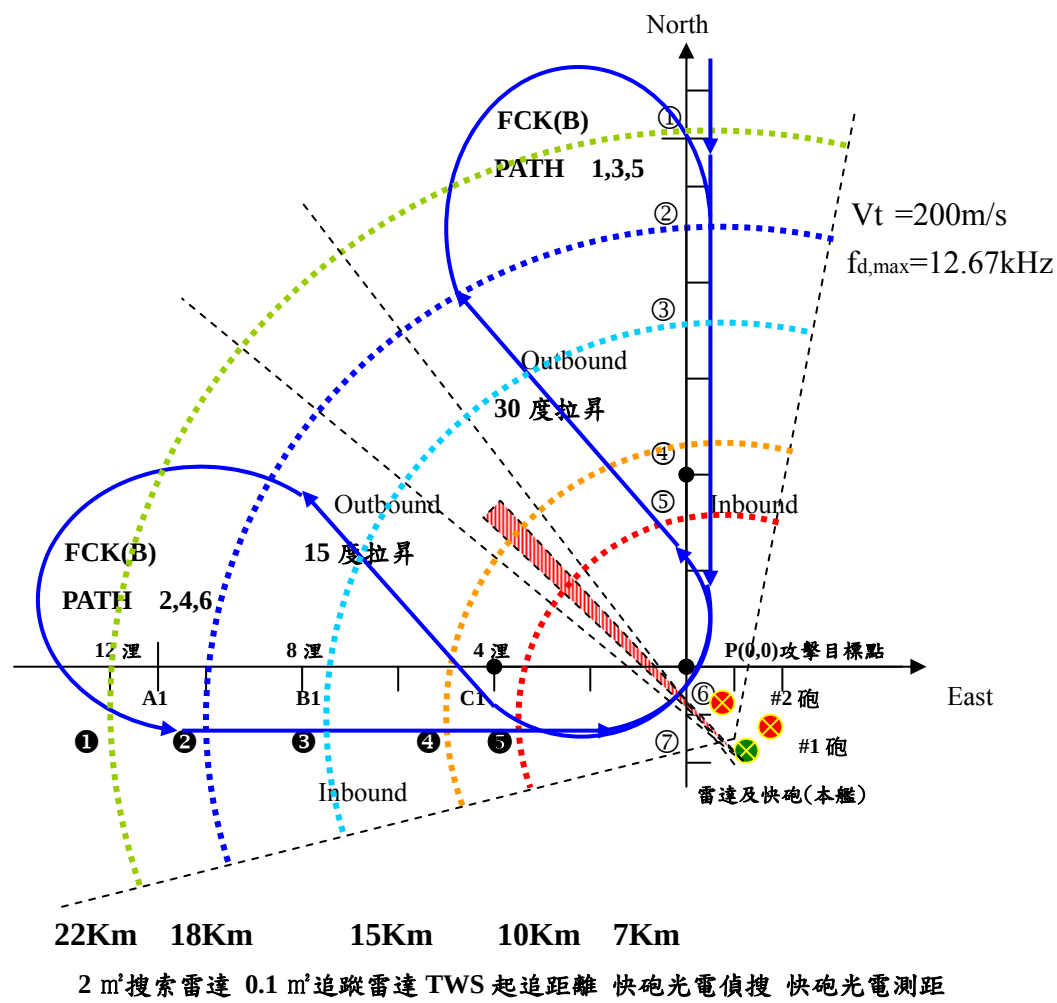


圖 7. 課目二-單機空對面戰術攻擊與脫離圖。

表 2. 40mm/70 銅霰彈散佈界驗證性能比較表

軸向	迴旋軸		俯仰軸	
	散佈界 (mrad)	偏差 (mrad)	散佈界 (mrad)	偏差 (mrad)
標準	0.37	0.77	0.72	0.61
研改 0	脫靶	-	脫靶	-
研改 1	0.56	1.35	0.94	0.83
研改 2	0.45	1.05	0.82	0.46

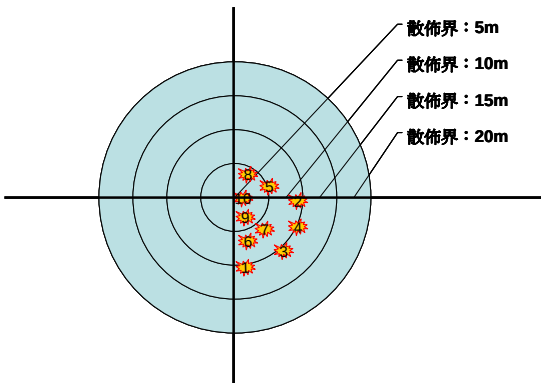


圖 8. 標準系統之十連發散佈界。

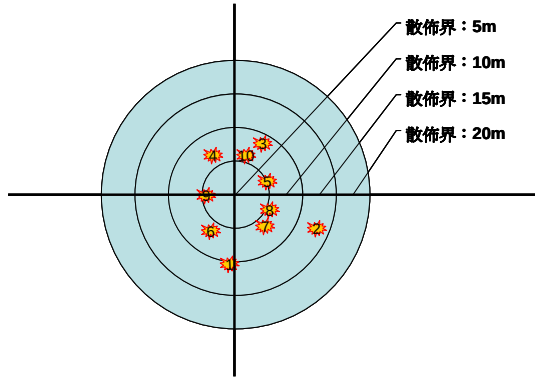


圖 9. 研改 1 系統之十連發散佈界。

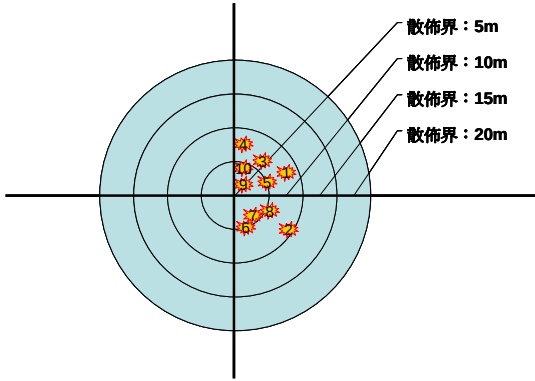


圖 10. 研改 2 系統之十連發散佈界。

八、結論

本研究在砲令射控中，為解決參數估計問題，提出集中 β 濾波器配合設計者射表，及改良最小二乘法濾波器配合擴增設計者射表，可實現射控雷達對彈丸和目標同時精確追蹤，大幅提升射擊精度。未來對於使用國外原廠系統配合國造彈藥之武器系統，可提供一有效方法，可使彈丸和目標之間的偏差量控制在一定範圍內，提升射擊精度。

附錄

由射表併同雷達測得到 N 組數據

$$(x_i, \theta_{0i}); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

將(1)所得數據以 m 次多項式進行曲線擬合(Curve Fitting)，

$$\begin{aligned} \theta_0 &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= \sum_{j=0}^m a_j x^j \end{aligned} \quad (2)$$

(2)中每一組擬合曲線與量測實際值間誤差可表為矩陣式

$$\bar{E}_r = X_N \bar{A}_m - \bar{\theta} \quad (3)$$

其中

$$\bar{E}_r = \begin{bmatrix} e_{r1} \\ e_{r2} \\ \vdots \\ e_{rN} \end{bmatrix}; \quad \bar{A}_m = \begin{bmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_{01} \\ \theta_{02} \\ \vdots \\ \theta_{0N} \end{bmatrix};$$

$$X_N = \begin{bmatrix} x_1^m & x_1^{m-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^m & x_2^{m-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_N^m & x_N^{m-1} & \dots & x_N & 1 \end{bmatrix};$$

令目標函數(Cost Function) J 表為

$$J = \bar{E}_r^T \cdot \bar{E}_r \quad (4)$$

將(3)代入(4)

$$J = (X_N \bar{A}_m - \bar{\theta})^T (X_N \bar{A}_m - \bar{\theta}) \quad (5)$$

將目標函數 J 對 $\bar{A}_m$ 作偏微並令

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{A}_m} = 0 \quad (6)$$

由(5)代入(6)可得最小二乘法之參數估測值(Least-squares Estimation)為

$$\hat{A}_m = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T \bar{\theta} \quad (7)$$

由(7)計算估測值 $\hat{A}_m$ ，其本身為隨機變量，用不同的樣本實現它，可得到不同的估測值，由於無偏差估測，即

$$E[\bar{E}_r] = 0 \quad (8)$$

將(7)取期望值可得

$$E[\hat{A}_m] = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T \cdot E[\bar{\theta}] \quad (9)$$

由(3)代入(9)可得

$$\begin{aligned} E[\hat{A}_m] &= E[\bar{A}_m] - \\ &\quad (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T \cdot E[\bar{E}_r] \end{aligned} \quad (10)$$

由於無偏差估測，由(8)代入(10)可得

$$E[\hat{A}_m] = E[\bar{A}_m] \quad (11)$$

由(11)知 $\hat{A}_m$ 為 $\bar{A}_m$ 之無偏差估測值。

參考文獻

- [1] 洪兆宇、趙嘉琦、尹清崗、尹清岩，”砲令射控中雷達追蹤用彈道模型”，中正嶺學報，第2卷，第37期，頁163-174，中華民國98年。
- [2] 鄭芳田；火神中小型精密火砲射控系統研製計畫(預測器計畫)結果報告，中山科學研究院第三研究所，中華民國75年6月。
- [3] 陳錦漳、查忠鴻、胡志遠、蕭劉順、鄭盛發、林忠弘、鄭芳田，砲令射控與追蹤架構，中山科學研究院第三研究所，中華民國75年6月。
- [4] 鄭芳田；追蹤濾波器之總整理，中山科學研究院第三研究所，中華民國75年6月。
- [5] Frienden, D. R., Principles of Naval Weapons System, Naval Institute Press, Chap. 19, 1985.
- [6] 洪兆宇、毛世威、王振宇、趙嘉琦 ”砲令射控中雷達追蹤用彈道模型”，陸軍軍官學校八十四週年校慶基礎學術研討會機械組論文集，ME153-164，中華民國97年5月。
- [7] 趙嘉琦，發射藥特性對砲令射控之影響，國防大學中正理工學院國防科學研究所兵器組研究進修計畫，中華民國89年4月。
- [8] 趙嘉琦，發射藥特性對砲令射控之影響，國防大學中正理工學院國防科學研究所兵器組研究進修計畫簡報，中華民國89年5月。
- [9] 洪兆宇、方淳民、趙嘉琦、尹清崗、尹清岩，”砲令射控迴路中彈丸軌跡之濾波與預測”，陸軍軍官學校八十五週年校慶暨第十六屆三軍官校基礎學術研討會機械組論文集，中華民國98年5月。
- [10] Singer, R. A., and Behnke, K., “Real-time Tracking Filter Evaluation and Selection for Tactical Application” IEEE Trans. On Aerospace and Electronic System, Vol. AES-7, No.1, Jan. 1971.
- [11] Quigley, A., “Tracking and Associated Problems” IEEE conference on radar-present and future, London, Oct. 1973.
- [12] 李守誠、王國政、劉正瑜，”國造二0公釐雙聯裝機砲滾轉控制迴路設計及模擬”，中正嶺學報，26卷，第2期，頁133-146，中華民國87年。
- [13] Lee, S. C. and Liu, C. Y., “Preliminary Design of Tracking Loop for Marine-Used Machine Gun”, Defense Science Journal, Vol. 49, No. 2, pp. 81-90, 1999.
- [14] Lin, C.-F., Modern Navigation, Guidance and Control Processing, Prentice Hall, Sec. 7.1.5, pp. 421-414, 1991.
- [15] Dalata, P. R., “The Tracking Index A Generalized Parameter for Alpha-Beta-Gamma Target Trackers”, IEEE Trans. Electronic System, Vol. AES-20, pp. 174-182, March 1984.
- [16] 毛大喜，”隨機控制系統與數位濾波器之探討”，中華民國74年自動控制研討會論文集，頁217-227，中華民國74年。
- [17] Skolnik, M. I., Introduction to Radar Systems, 2nd ed. New York, McGraw-Hill, pp. 183-186, 1980.
- [18] Benedict, T. R., “Synthesis of an Optimal set of Radar Track-While-Scan Smoothing Equation” IRE Trans. On Automatic Control, Jul. 1962.
- [19] Cantrell, B. H., Trunk, G. V., Queen, F. D., Willson, J. D., Alter, J. J., “Automatic Detection and Integrated Tracking System” The Record of the IEEE Faternational Radar Conference, New York, Apr. 1975.
- [20] Hovanessian, S. A., Radar Detection and Tracking System, Artech House. 1978.
- [21] Simpson H. R., “Performance Measures and Optimization Condition for a Third-Order Sample Data System” IRE Trans. on Automatic Control, Apr. 1963.
- [22] 吳英泰，非線性理論，中正理工學院兵器系統工程研究所飛彈組講義，中華民國84年3月。
- [23] 孔健君，強健控制理論，國防大學中正理工學院國防科學研究所兵器組講義，中華民國92年2月。
- [24] 孔健君，非線性系統理論，國防大學中正理工學院國防科學研究所兵器組講義，中華民國92年2月。

義，中華民國 93 年 1 月。

- [25] 孔健君，H。控制理論與應用，國防大學中正理工學院國防科學研究所兵器組講義，中華民國 93 年 1 月。
- [26] 趙中行、伍世文、方鵬飛，海軍兵器系統基本原理，海軍總司令部，第十九章，中華民國 79 年 3 月。
- [27] John Van De Vegte, Feedback Control System, Prentice-Hall, pp75-77, 1986.
- [28] Chi-Tsong Chen, Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods, Saunders College Publishing, pp74-76, 1993.