

圖1 柏拉圖的宇宙形成觀



雖然各有空間。每個原子的周圍都有廣大的空間。雖然各有

數字是怎麼來的？

· 尚景賢 ·

立方體。第五種正多面體是由正五邊形形成的十二面體，這就是組成天上物質的第五種元素——以太，萬物都可以用其所含元素的比例來加以確認定名。

德謨克利特(Democritus)則拋棄了四元素說的思維，在兩千多年以前就提出了一「原子論」，

他主張「所有的物質都是由極小的原子所

構成，原子不能再分割，而每個原子的周圍都有廣大的空間。」

古希臘的哲學家們總是探討著「一」與「多」的問題，試著從實體中的連續變化歷程及萬物的生死交替更迭當中，去思考著宇宙是否擁有一種共同的本原，找尋那一個永恆存在之物，萬物起源最初的某種物質。因此，泰勒斯(Tales)宣稱是水，阿那克西美尼(Anaximenes)說是氣，赫拉克利特(Heraclitus)則是火，齊諾弗尼斯(Xenophanes)認為是土，而恩培多克勒(Empedocles)綜合了大家的看法第一個提出四元素說，各元素則是由「愛」與「憎」產生聚合或分裂。柏拉圖(Plato)則認為宇宙起源有兩種直角三角形，一種是正方形的一半，另一種是等邊三角形的一半。這兩種類型的三角形就可以產生出四種正多面體，組合而成的就是四種元素的微粒——火微粒是正四面體、氣微粒是正八面體、水微粒是正二十面體、土微粒是由正五邊形形成的十二面體。第五種正多面體是由正五邊形形成的十二面體，這就是組成天上物質的第五種元素——以太，萬物都可以用其所含元素的比例來加以確認定名。

德謨克利特(Democritus)則拋棄了四元素說的思維，在兩千多年以前就提出了一「原子論」，他主張「所有的物質都是由極小的原子所構成，原子不能再分割，而每個原子的周圍都有廣大的空間。」

立論基礎和說法，都是從其觀察所見，採用不同的思維角度，去探討一個本質上的問題，這個世界究竟如何產生，是由無到有、由一到多嗎？猶如道德經所言：「無為萬物之母，有為萬物之始……，一生二、二生三、三生萬物。」無論其立論為何，說明了人類已經從神話傳說當中，走出一條屬於人類獨創的哲學、科學之路。

畢達哥拉斯(Pythagoras)認為「萬物都是數」。他以埃及人發現「三角形的邊長若為(三、四、五)必有一直角」為基礎，進一步提出「一個直角三角形當中，兩股的平方和等於斜邊的平方」，這就是著名的「畢氏定理」。當他發現圓周率 π 、 $\sqrt{2}$ 等無理數時，大為震驚，也終其一生不願承認。當他的學生希帕索斯向外人透露無理數的存在時，引發畢達哥拉斯的不悅，甚至把希帕索斯淹死。

其實，早在畢達哥拉斯發現「畢氏定理」之前，中國歷史上最早的一部算術類經書——《周髀算經》，就記載周公與商高的談話，論及勾股定理的紀錄了。周就是圓，髀就是股，即「勾三股四弦五」，亦被稱為「商高定理」。足見中國在數學上的發展歷史久遠。

「算籌」又稱為算、籌、策、算子等，是直到宋、元時期中國人的主要計算工具。然而，算籌產生於何時，無可靠記載。《老子》說：「善數不用籌策。」這說明最晚在春秋末期，算籌就是人們的主要計算工具了。算籌通常用竹，也有用木、骨、石製成的。《漢書·律曆志》說：「其算法用竹，徑一分，長六寸。」分別合今天0.2三釐米與十三.八釐米。為避免滾動與布算面積過大，後來算籌逐漸變短，截面由圓變方。河北石家莊出土的東漢算籌截面已變為方形，長度縮短為八.九釐米。

在《孫子算經》最先記述了「算籌」記數制度：「凡算之法，先識其位。一從十橫，百立千僵，千十相望，萬百相當。」《夏侯陽算經》又補充道：「滿六以上，五在上方，六不積算，五不單張。」這就是說，算籌數字有縱橫兩式，採用十進位制

代表數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9
縱式	一	二	三	四	五	六	七	八	九
橫式	一	二	三	四	五	六	七	八	九

圖2 中國十位數以下數字的縱橫兩種表示法

$$1525.9375 = 1525 \textcircled{0} 9 \textcircled{1} 3 \textcircled{2} 7 \textcircled{3} 5 \textcircled{4}$$

或是

			①	②	③	④
1	5	2	5	9	3	7

圖3 唐宋時期的中國小數的表示法

1	2	3	4	5	6	7	8	9
一	二	三	四	五	六	七	八	九
10	100	1000	10000	100000	1000000			

圖4 埃及人數字的表示法

如圖2所示用此十八個符號，及用空位表示零，可以表示任何一個自然數。例如，一九九七便以一三三三表示。

中國古代沒有筆算，籌算中用空位表示零。有人認為「〇」源自於阿拉伯數字「0」，這是誤解，因為中國的符號〇是源自於古籍的抄寫中，有用口表示脫文的習慣，而算籌以空格表示零的方法，後來因書寫的方便、快捷，逐漸變成了「〇」形。《金史》大明曆中有「四百〇三」等數字。可見，當時「〇」已經是一個慣用的中國字。

中國也是世界上使用一般分數最早的國家，以及最先使用小數的國家。在公元二六三年劉徽說：「物之數量，不可悉全，必以分言之。」產生分數的觀念。劉徽將分子與分母看成比率關係，與現代數學中關於分數的定義完全一致。分數的表示採用分子在上，分母在下，不過中間沒有現在的橫線。如 $\frac{1}{2}$ 表示成 $\frac{1}{2}$ 。劉徽在開方不盡時用十進小數(微數)表示無理根的近似值，也開創十進位小數表示法之先河，例如，小數1.525.9375的寫法如圖3所示。

古埃及人是最先懂得用手掌和前臂來量度距離的人群之一。最初，他們利用手指來計算數目，其後又創造了一種十進位數字表示法，在十位數以上，分別使用符號來表示，「10」就表示十，二個「

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
2	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
3	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX
4	XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XL
5	XLI	XLII	XLIII	XLIV	XLV	XLVI	XLVII	XLVIII	XLIX	L
6	LI	LII	LIII	LIV	LV	LVI	LVII	LVIII	LIX	LX

圖5 羅馬數字表示法（由1~70）

約在兩千五百年前，羅馬文化發展初期，人們爲了表示一、二、三、四，就分別伸出一、二、三、四根手指；表示五個就伸出一隻手；兩隻手就表示十。羅馬人爲了記錄數字，便在羊皮上畫上I、II、III、來代替手指的數，一隻手就寫成「V」，意指大拇指與食指張開的形狀；兩隻手就畫成「VV」，後來又發展出一隻手向上，一隻手向下的「X」代表十，這就是羅馬數字的初期發展構思。

由於要記錄的數字越來越大，爲了寫下較大的數目，羅馬人用「C」表示一百，C是拉丁字Century的字首，就是一百的意思。用「M」表示一千，因拉丁字mille就是一千的意思。取字母C的一半成爲符號L，表示五十；用字母D表示五百；若在數的上面畫一橫線，這個數就擴大一千倍。這樣，羅馬數字就有七個基本符號：I（1）、V（5）、X（10）、L（50）、C（100）、D（500）、M（1000）。再訂定七種符號的運用規則，這樣就可以用來表示任意的正整數。

- 重複數次：一個羅馬數字重複幾次，就表示這個數的幾倍。
- 右加左

減：在一個較大的羅馬數字的右邊記上一個較小的羅馬數字，表示大數字加小數。在一個較大的數字的左邊記上一個較小的羅馬數字，表示大數字減小數字。左減不能跨越等級。比如，九十九不可以用IC表示，用XCIX表示。

- 加線乘千：在一個羅馬數字的上方加上一條橫線或者在右下方寫M，表示將這個數字乘以一千，即是原數的一千倍。如果上方有兩條橫線，即是原數的一百萬（1000000）倍。
- 單位限制：同樣單位只能出現三次，如四十不能用XXXX表示，而要用XL表示。

在古代的美索不達米亞時代，數字以楔形文字表達，分「個位」和「十位」，1以V代表，2爲YY，3爲YYY，如此類推，直至9；10則爲A，20爲AA，如此類推，直至50，大過59個數字，就重覆以上符號作標示。閃族和早期巴比倫沒有「0」的符號，故未必能單就一堆楔形符號即時說出其代表的數字。到後來，巴比倫人逐漸以點代表零。

這種巴比倫式的數字結構是六十進位制，當初的構思是著眼於數字主要用於計算角度、地理座標和時間。而數字六十有十二個因數，即一、二、三、四、五、六、十、十二、十五、二十、三十和六十，其中二、三和五是質數。由於擁有較多因數，六十進位制的數可被較多數整除；換言之，可以分成多種不同的時間長度，例如一小時可以是兩個三十分鐘、三個二十分鐘、四個十五分鐘等。六十也是可同時被一至六整除的最小的數字。而一小時相等於六十分鐘，一分鐘則爲六十秒。於是，三小時二十三分十七秒（3:23:17）即相當於 $3 \times 60^2 + 23 \times 60 + 17 \times 60^0$ 秒或 $3 \times 60^3 + 23 \times 60^2 + 17 \times 60^1 + 60^0$ 小時。當中的六十進位制數字（即3、23和17）均是以十進位制數字寫出，在時間的表示上也非常的實用。此外，還有在角度上的表示也有其便利性。因爲，一個圓形被均分成三百六十度，每一度有六十角分，一角分等於六十角秒，也是六十進位制的。而在中國的陰曆當中，以天干與地支兩者組合的方式，構成六十爲一個周期（甲子）的概念，也有著六十進位制的構思哦！

在約公元七世紀時，阿拉伯人征服了東起印度，西到非洲，建立了當時雄霸一方的「撒拉遜大帝國」，而撒拉遜（Sarraceni）是歐洲人泛指當時中東地區信奉回教的人，中國唐朝時期稱之爲「大食國」。強大的帝國匯集了西來的希臘文化和東來的印度文化，吸收消化從而創造了舉世聞名、輝煌燦爛的「阿拉伯文化」。有一位印度的天文學家在公元七世紀左右拜訪了巴格達王宮。把印度的天文學獻給當時的國王。也把印度數字一、二、三、四……和印度的計算方法介紹給國王。印度數字和印度計數法既簡單又方便。它的優點遠遠超過其他的計數方法。很快的阿拉伯人接受它，之後由於文化的傳播交流，這套數字表示符號和計算方法，輾轉而廣泛的傳播到歐洲各國，歐洲人誤以爲是阿拉伯人發明的，因此就叫作「阿拉伯數字」。

那麼阿拉伯數字當初發明者的構想究竟從何而來的呢？是像倉頡一樣，思考著「六書」象形，指事，會意，形聲，轉注，假借」的那一種呢？還是用「象形、指事、會意、形聲」四項造字的原理，或是用「轉注、假借」兩項用字的方法呢？

在此提供讀者一些有關倉頡造字時發生的意外小插曲。

有一天，一位老人問倉頡：「『馬』字有四條腿，而牛也有四條腿，怎麼你造出來的『牛』字只剩下二條尾巴呢？」

1	T	11	<T	21	<<T	31	<<<T	41	<<<<T	51	<<<<<T
2	TT	12	<TT	22	<<TT	32	<<<TT	42	<<<<TT	52	<<<<<TT
3	TTT	13	<TTT	23	<<TTT	33	<<<TTT	43	<<<<TTT	53	<<<<<TTT
4	TTTT	14	<TTTT	24	<<TTTT	34	<<<TTTT	44	<<<<TTTT	54	<<<<<TTTT
5	TTTTT	15	<TTTTT	25	<<TTTTT	35	<<<TTTTT	45	<<<<TTTTT	55	<<<<<TTTTT
6	TTTTTT	16	<TTTTTT	26	<<TTTTTT	36	<<<TTTTTT	46	<<<<TTTTTT	56	<<<<<TTTTTT
7	TTTTTTT	17	<TTTTTTT	27	<<TTTTTTT	37	<<<TTTTTTT	47	<<<<TTTTTTT	57	<<<<<TTTTTTT
8	TTTTTTTT	18	<TTTTTTTT	28	<<TTTTTTTT	38	<<<TTTTTTTT	48	<<<<TTTTTTTT	58	<<<<<TTTTTTTT
9	TTTTTTTTT	19	<TTTTTTTTT	29	<<TTTTTTTTT	39	<<<TTTTTTTTT	49	<<<<TTTTTTTTT	59	<<<<<TTTTTTTTT
10	<	20	<<	30	<<<	40	<<<<	50	<<<<<		

圖6 巴比倫數字表示法（由1~59）

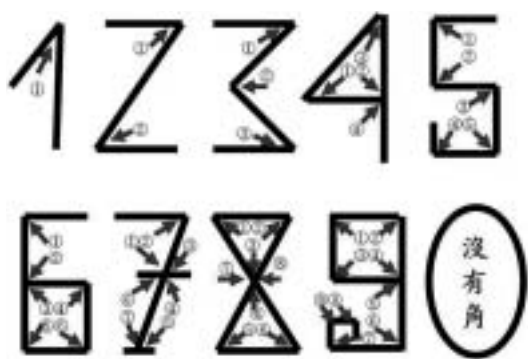


圖7 阿拉伯數字代表的原意

示有千里之遠，應該念出遠門的『出』字，而你卻教人念成重量的『重』字。反過來，兩座山合在一起的『出』字，本該為重量的『重』字，你倒說成了出遠門的『出』字。這幾個字真叫我難以琢磨，只好來請教你了。」

還有我們現在用的「矮」字和「射」字，是不是也顛倒了呢？身體只有一寸是不是很矮嗎？而委力於矢之上是不是射呢？其他還有許多的例子，如果讀者有興趣，不妨拿起字典研究研究吧！

從印度文字的發展上似乎看不出和阿拉伯數字的直接關連性，所以，如果你從這個角度去思考，那麼可能要讓你大失所望了。因為，阿拉伯數字的構思，必須要從它的原始書寫方式來看，從圖中你是否能赫然發現其中的奧秘呢？

印度人是不是也從文字發展的觀念而構思出阿拉伯數字呢？我們不妨探討一下印度文字的發展情形。在亞利安人(Aryan)來到印度並取代印度河文明之後，逐漸發展出發達的文字系統，在西元前三世紀的阿育王(Asoka)時期，官方就以佉盧(Kharosthi)和婆羅米(Brahmi)兩種文字記錄婆羅米文字的北方形式發展而成笈多體文字，又發展出藏文及和田文字體系。然後藏文又發展出雷布查及八思巴體系，

倉頡心想：「自己原先造『魚』字時，是寫成『牛』的樣子，造『牛』字時，是寫成『魚』的樣子。都怪自己粗心大意，竟然後來弄顛倒了。」

老人接著又問：「你造的『重』字，是表示有千里之遠，應該念出遠門的『出』字，而你卻教人念成重量的『重』字。反過來，兩座山合在一起的『出』字，本該為重量的『重』字，你倒說成了出遠門的『出』字。這幾個字真叫我難以琢磨，只好來請教你了。」

而婆羅米文字的南方形式則發展出格蘭塔字母，又衍生出達羅毗荼語言的文字體系。後來佉盧文字不再使用，只剩婆羅米文字繼續在印度發揮影響力了。

婆羅米文字是現今印度境內所使用的各種書寫文字系統的始祖，而婆羅米文字本身據考驗很可能是由學習閃語的文字而來。閃語族文字也是腓尼基文、阿拉伯文、希伯來文、希臘文的祖先，而希臘文又發展出拉丁文、亞美尼亞文等其他歐洲文字體系，因此今日從南亞到近東再到歐洲的拼音文字都可能是同祖先的後代。

如果你還是想不出來，就讓筆者來說明吧！一開始，印度人思考著用什麼方法來表示數字最好呢？尤其印度人的數字結構是何其雄偉，不是只算到百、千、萬而已，上推六十九至七十二進位數的「無量大數」，下到六十九至七十二退位數的「清靜」，所以必須考慮到它的便利、彈性、易讀、易懂。最後，他們找到了一種很簡單的表示法，而又可以在其四進位體系裡向右（退位）或向左（進位）重覆使用的表達方式，那就是十進位法，而符號的表示就代表著它有幾個角。「1」表示有一個角，「2」有二個角，而「3」有三個角，以此類推，「9」有九個角，而「0」呢？恰好一個角也沒有（如圖7所示）。

如果畢達哥拉斯地下有知，當初在發現三個正方體中間產生一個三角形空間，以及它們彼此之間的微妙關係而引發著名「畢氏定理」的想法時，如果同時也能想到用角度的計數方式去思考表達數字的方法的話，那麼在數學的領域裡，他的地位可能就像倉頡在文字領域當中一樣，佔有更重要、更崇高的地位了。或者，古希臘的哲學家們在思考物質的本質時，觸發如何使記載數字方法更便利的構思，例如柏拉圖在構思多種面體的宇宙基本形狀和組成時，就可能發展出一套良好便利的數字記載表示法。那麼歐幾里德(Euclid)的幾何原本會不會比較容易閱讀。在公元前二二二年命喪羅馬士兵的阿基米德(Archimedes)，會不會因為數字記載便利而沒有在家門口地上畫圖研究幾何問題，也就不會被羅馬戰士撞見，而逃過一劫呢？我們現在的科學會不

會因此而更進步，人類已經在浩瀚宇宙當中穿越時空，來去自如了呢？

從以上的數字發明過程當中我們不難理解，無論是甲骨文、楔形文等都是必須記錄在泥板、石頭（壁）、骨頭、竹簡等堅硬的物體上，並不像我們現在文字書寫如此的方便。如何能夠便於刻劃，又可以一眼看出其意思，這些不同文化便發展出不同的數字表示方法。再從不同表示方法的比對當中我們不難發現，為什麼阿拉伯數字能夠脫穎而出，流傳世界各國廣受好評與使用。它的書寫容易、運用彈性、便捷、表達周密完整，確實是非常實用的數字表示方法。但是，當文明進入了資訊時代，電腦所使用的二進位、四進位、八進位、十六進位也發展出一個新的數字表示體系。因為電腦處理資料的方式是以位元(Bit)、位元組(Byte)的方式運作，必須找到相對應的一種表示方法，在處理二、四、八進位制時，使用阿拉伯數字仍游刃有餘，但是十六進位制就顯得不夠用了。

資訊界的學者們為求便利，於是直接在「9」之後，加上了A B C D E F分別代表「10」、「11」、「12」、「13」、「14」、「15」，就出現了現今所廣為流傳的十六進位表示法。這種表示方式，完全不能追溯文字符號發展的構思與原則，貪圖方便而任意加以組合使用，使得原創之美失去意義。如此重大的變革，以及主宰資訊世界的資料表示法，未能深思如何充份彰顯其理念，以及背後隱含的邏輯意義，而去深思研究出一套最佳的表示方法，倉促組合運用，使得十六進位法將淪為人們強加記憶的一種數字表示方式而已，殊為可惜。當十六進位制數到「9」之後，英文體系國家的人們，就必須從英文字母排列的順序加以強記轉換；而非英文體系國家的人們，就更難以學習明瞭和記憶轉換了。筆者覺得中國的八卦表示方法倒是一個不錯的可考慮的方法，以「—」表示「0」（陰）；以「■」表示「1」（陽）；「陰」與「陽」相對於「0」與「1」，二進位用一組 $Q_2=Q_1$ ；四進位用二組 $Q_4=Q_1$ ；八進位用三組 $Q_8=Q_1$ ；十六進位用四組 $Q_{16}=Q_1$ ，倒也蠻符合二進位法的原則 $(C = \log_2 N)$ 。不過似乎在書寫上就不是那麼方便理想了，不知道讀者們有沒有其他更好的構思呢？